

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE LILLE FLANDRES-ARTOIS

D.E.A. DE GENIE CIVIL

**ENDOMMAGEMENT ET RUPTURE**  
**D'UN SOLIDE MULTIFISSURE**

Par : Vincent RENAUD

Soutenu le 23 Juillet 1993

Responsable : D. KONDO

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE LILLE FLANDRES-ARTOIS

D.E.A. DE GENIE CIVIL

## **Annexes**

Par : Vincent RENAUD

Soutenu le 23 Juillet 1993

Responsable : D. KONDO

## SOMMAIRE

<b><i>Introduction</i></b> .....	page 1
<b><u>Chapitre I</u></b> : <b>Etude bibliographique</b> .....	page 2
I-1) : Rôle de la micro-fissuration .....	page 2
I-2) : La méthode auto-consistante .....	page 5
I-2-1) : Principe de la méthode auto-consistante.....	page 6
I-2-2) : Extensions de la méthode .....	page 9
I-3) : Conclusion .....	page 11
<b><u>Chapitre II</u></b> : <b>Développement d'un outil numérique pour le calcul des modules effectifs</b> .....	page 12
II-1) : La méthode des discontinuités de déplacements .....	page 12
II-2) : Le générateur aléatoire de fissures .....	page 16
II-3) : Application à l'évaluation du module effectif .....	page 18
II-3-1) : Distribution aléatoire .....	page 20
II-3-2) : Distribution corrélée .....	page 23
II-3-3) : Fissures concentrées dans une bande .....	page 24
<b><u>Chapitre III</u></b> : <b>Etude de l'endommagement et de la rupture en compression uniaxiale</b> .....	page 26
III-1) : Généralités et premiers résultats .....	page 26
III-2) : Effet de l'orientation sur l'endommagement .....	page 29
III-3) : Effet de l'interaction .....	page 31
III-3-1) : Variation de la raideur latérale .....	page 32
III-3-2) : Etude numérique de la propagation des fissures .....	page 33
III-3-3) : Variation de l'énergie G .....	page 35
III-4) : Modèle de fissure mixte .....	page 38
III-5) : Etude du processus de rupture .....	page 39
<b><i>Conclusion</i></b> .....	page 44
<b><i>Bibliographie</i></b> .....	page 45

## RESUME

Le phénomène de micro-fissuration est, à l'heure actuelle, assez mal connu. En effet, beaucoup d'études théoriques, dont certaines se contredisent, ont été effectuées sans qu'elles soient réellement confrontées à une réalité expérimentale. C'est pourquoi, dans cette étude, des distributions géométriques aléatoires sont utilisées. La simulation numérique est effectuée à l'aide d'une méthode intégrale de discontinuités de déplacements. Cette technique présente l'avantage d'être adaptée aux milieux micro-fissurés. Des résultats concernant les modules effectifs sont présentés dans divers cas (traction, compression). La propagation de micro-fissures sous sollicitation de compression est également étudiée.

## Mots clés

- Module effectif - Endommagement - Méthode auto-consistante - Méthode intégrale - Discontinuité de déplacement - Simulation numérique - Densité de fissuration - Propagation de fissures -

## Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur Henry, Professeur à l'Université de Lille. Il a bien voulu m'accueillir au sein de son équipe pour ce mémoire de D.E.A.

Par ailleurs, mes remerciements les plus sincères s'adressent à mon responsable de projet D. KONDO. C'est en effet grâce à lui que j'ai pu obtenir le support scientifique complémentaire qui m'a été nécessaire pour mener à bien cette étude sur la micro-fissuration. Je le remercie par ailleurs pour sa continue disponibilité et sa patience qui m'ont permis d'avancer aussi vite que je le désirais.

## INTRODUCTION

L'évaluation des propriétés mécaniques des matériaux fissurés est un sujet de grande importance en mécanique des roches. L'apparition récente en rhéologie des géomatériaux de la théorie de l'endommagement a renforcé la nécessité d'une meilleure compréhension des mécanismes de micro-fissuration.

La mécanique de l'endommagement aborde le problème du comportement des matériaux micro-fissurés sous différents aspects : homogénéisation du milieu, modélisation macroscopique s'appuyant plus ou moins sur des observations microscopiques. Le passage "*micro- macro*" apparaît ainsi comme l'un des aspects essentiels de la modélisation des matériaux endommageables. Par exemple, Costin (1985, 1989), s'appuyant très concrètement sur la physique des micro-fissures, a pu construire un modèle d'endommagement anisotrope. Dans ce modèle, le comportement moyen de l'ensemble des micro-fissures est supposé du même type que celui d'une micro-fissure isolée. Les éventuelles interactions ne concernent que des géométries particulières.

Pour la détermination des modules effectifs, la méthode la plus couramment étudiée est la méthode auto-consistante. Le travail de référence dans ce domaine est celui de Budiansky et O' Connell (1976). Ces auteurs ont travaillé sur des distributions aléatoires de micro-fissures ouvertes. Ce travail a été étendu au cas de distributions non-aléatoires (Hoenig, 1979) et aux cas de fissures fermées (Horii et Nemat-Nasser, 1983). Les résultats des différents travaux sont parfois contradictoires, notamment en ce qui concerne l'existence d'une densité critique, le rôle réel des types de distribution ou les micro-fissures fermées.

L'objectif de ce projet de fin d'étude est de mettre au point un outil de calcul numérique susceptible de traiter une plus grande diversité de configurations. Le générateur conçu peut influer sur le caractère aléatoire de la distribution, sur la longueur et l'orientation des micro-fissures ainsi que sur l'éloignement mutuel de ces dernières. L'étude a été menée à l'aide de la méthode des discontinuités de déplacements (Crouch, 1983). Le rapport est présenté en trois chapitres.

Le premier chapitre présente une étude bibliographique succincte d'une part sur l'influence mécanique de la micro-fissuration, et sur les méthodes auto-

consistantes d'autre part. La méthode des discontinuités de déplacements ainsi que le générateur de micro-fissures mis au point seront présentés au second chapitre. Ce chapitre s'achèvera par l'évaluation de modules effectifs sous sollicitation de traction. Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la compression uniaxiale.

L'importance réelle de la micro-fissuration dans le comportement des matériaux fragiles est un phénomène encore méconnu à l'heure actuelle. Cependant, depuis quelques décennies, de nombreux travaux aussi bien expérimentaux que théoriques ont été effectués dans ce domaine. L'objectif de la plupart des travaux est de comprendre les mécanismes de propagation des micro-fissures ainsi que les conséquences avec l'endommagement des matériaux.

Suivant l'échelle où l'on se place, il est possible de distinguer deux grandes classes de modèles :

- les modèles macroscopiques au sens de la mécanique des milieux continus ; ils peuvent rendre compte globalement d'observations faites à de plus petites échelles,
- les modèles mésoscopiques ou micro-mécaniques intégrant directement les données sur les micro-fissures.

Tout modèle micromécanique doit également permettre de rendre compte de :

- la dilatance,
- la transition fragile-ductile,
- éventuellement un comportement radoucissant.

L'objectif de cette étude bibliographique est double :

- montrer tout d'abord l'importance de la micro-fissuration dans le comportement des matériaux fragiles,
- confronter les méthodes théoriques permettant l'évaluation des modules effectifs d'un matériau micro-fissuré.

### **I-1) Rôle de la micro-fissuration**

La relation entre la micro-fissuration et le comportement mécanique a été étudiée par Bienawski. C'est la micro-structure qui détermine les caractéristiques initiales d'une roche : module d'élasticité, résistance à la rupture, seuil de fissuration. A partir du comportement postpic, deux classes de matériaux ont été depuis longtemps mis en évidence par Wawersik et Brace (Wawersik et Brace, 1971) :

- les roches de classe I sont celles pour lesquelles l'obtention de la rupture est progressive,
- la classe II regroupe les roches dont la rupture est difficilement contrôlable.

Les deux types de comportement sont en relation avec le réseau de fissures naturelles et leurs évolutions. Plus le réseau est important, plus la distribution des surfaces spécifiques de rupture est serrée, et plus la roche évoluera vers la classe II. Par contre, une forte micro-fissuration initiale dissipera l'énergie dans tout le volume d'échantillon testé ; ce qui montre un comportement tendant vers la classe I (les lignes de rupture se présentent sous forme d'une zone d'intense cisaillement).

Des résultats récents de travaux effectués dans le cadre de la localisation des déformations semblent montrer que celle-ci survient avant le pic de contrainte (Benaija, Boulay et al., 1990). Dans l'essai de compression, on distingue généralement quatre phases reliées à l'état de micro-fissuration :

- La phase I (OA) :

C'est la phase de serrage de micro-fissures. Elle est la représentation immédiate de l'état de micro-fissuration naturelle du matériau. Lorsque la compression est appliquée, les micro-fissures existantes se ferment. Souvent négligeable pour les roches, cette phase est pratiquement inexistante dans les bétons.

- La phase II (AB) :

Les déformations sont linéaires.

- La phase III (BC) :

Dans cette partie de la courbe, les déformations longitudinales restent linéaires, alors que les déformations transversales perdent leur linéarité. Les micro-fissures commencent à se propager suivant des directions privilégiées quasiment perpendiculaires à celle de la contrainte principale mineure. Les mécanismes en jeu sont le glissement et l'extension sur les lèvres de micro-fissures (voir la figure I.1 ci-dessous). Ceci induit une anisotropie dans le comportement du matériau. A ce stade, la propagation des micro-fissures est stable.

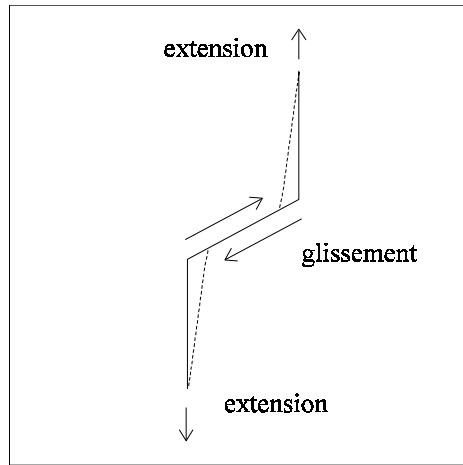


Figure I.1 : Les mécanismes de propagation de fissures.

- La phase IV (C...) :

C'est la phase de propagation instable qui précède la rupture du matériau. Les déformations longitudinales perdent leur linéarité. Sur la courbe de déformation volumique, nous pouvons observer une forte dilatance. Les micro-fissures interagissent et se relient entre elles. Les mécanismes qui entrent en jeu sont assez complexes (interaction, coalescence) et conduisent à la formation d'une fracture. La localisation éventuelle des déformations a très probablement lieu dans cette phase. Attirons aussi l'attention sur le fait que les mécanismes qui mènent à la localisation sont inconnus. Il en est de même en ce qui concerne les lois d'interaction des fissures et leur mode de coalescence (à partir de quand, de quelles conditions les fissures se réunissent-elles ?).

L'ensemble de ces quatre phases est représenté sur la figure I.2 ci-dessous :

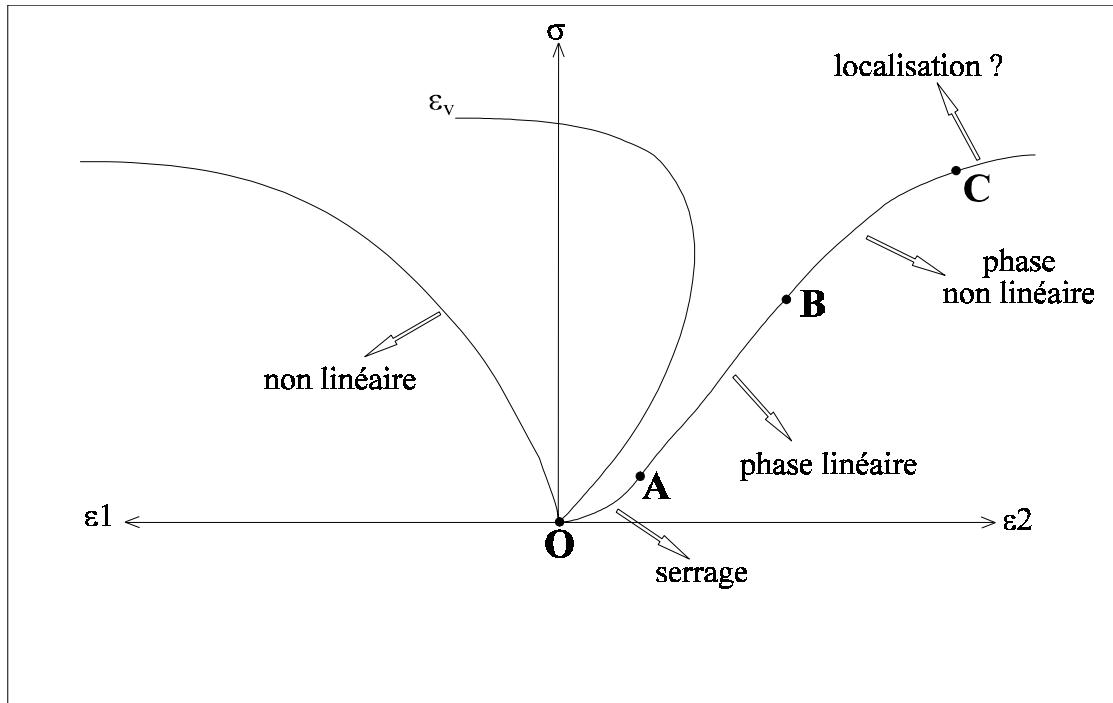


Figure I.2 : Les quatre phases de l'essai de compression.

En résumé, il semble que la variation de module dans le sens axial n'est pas très importante. En fait, la micro-fissuration induit des déformations transversales non-linéaires. L'effet de cette non-linéarité est l'apparition d'une forte dilatance dans le matériau.

Jusqu'à présent, le lien avec l'endommagement n'apparaît pas très clairement. En fait, pour étudier expérimentalement l'endommagement, il faut effectuer un déchargement du matériau et observer une variation de module. Il s'agit d'une dégradation, donc la structure intime du matériau change.

Au vu de différentes observations expérimentales en compression, divers types de géométrie de micro-fissures peuvent être envisagés (figure I.3).

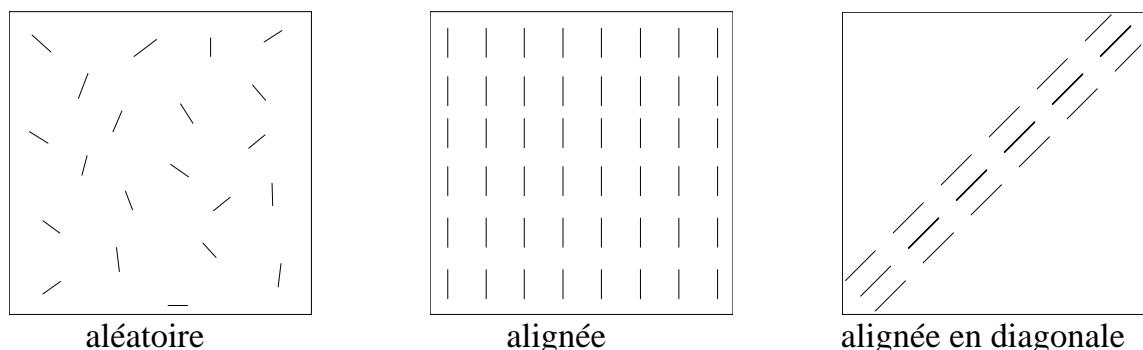


Figure I.3 : Différents types de géométrie de fissures.

En fait, Wong (Wong, 1982) a fait des observations microscopiques qui tendent à montrer que les mécanismes en jeu résultent de l'interaction entre micro-fissures et micro-vides (voir la figure I.4 ci-dessous). A priori, deux mécanismes sont importants : le mécanisme de micro-fissuration et celui de l'expansion des cavités. Mais, dans le domaine qui nous intéresse, c'est à dire les roches, le mécanisme prédominant est la micro-fissuration. Cela n'est plus vrai pour le béton et pour les matériaux rocheux poreux.

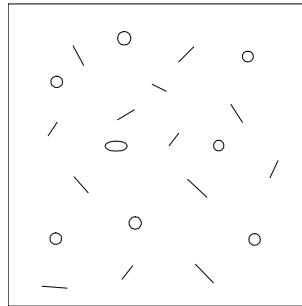


Figure I.4 : Observation microscopique d'un matériau fissuré.

## I-2) La méthode auto-consistante

Pour évaluer le module d'Young effectif, il existe plusieurs méthodes utilisées dans les différentes études sur la micro-fissuration :

- l'homogénéisation,
- la méthode auto-consistante,
- la méthode différentielle.

Dans la méthode différentielle, sur laquelle a beaucoup travaillé R.W. Zimmerman (R.W. Zimmerman, 1991), la densité de fissure est incrémentée, à chaque incrément, les paramètres définissant les propriétés du matériau sont recalculés.

La méthode auto-consistante décrit l'évolution du module d'Young effectif en fonction de la micro-fissuration. Mais cela dépend essentiellement de la longueur et de l'orientation de la micro-fissure. C'est pourquoi la géométrie des micro-fissures est très importante. C'est la méthode que nous retenons pour notre étude.

A mi-chemin entre la méthode différentielle et la méthode auto-consistante, il existe donc une alternative qui est la méthode d'homogénéisation. Cependant la structure géométrique des fissures doit être périodique, ce qui exclut complètement l'aléatoire. En effet, cette méthode utilise des moyennes qui donneraient des résultats très dispersés sur une population aléatoire.

### I-2-1) Principe de la méthode auto-consistante

La méthode auto-consistante, dans sa forme la plus connue, est due à Budiansky et O' Connell (Budiansky et O' Connell, 1976) qui ont travaillé sur des micro-fissures aléatoires planes supposées ouvertes.

Considérons un corps homogène soumis à un champ de contrainte hydrostatique  $P$ . L'énergie potentielle est :

$$\phi = -\frac{P^2 V}{2K} \quad \begin{aligned} V &: \text{volume total du solide} \\ K &: \text{module de compressibilité} \end{aligned}$$

Soit maintenant une distribution aléatoire de micro-fissures dans le milieu ; cela provoque une variation d'énergie potentielle  $\Delta\phi$ .

Le module effectif s'exprime à l'aide de la relation :  $-\frac{P^2 V}{2\bar{K}} = -\frac{P^2 V}{2K} + \Delta\phi$ .

Pour estimer  $\Delta\phi$ , on calcule l'énergie perdue par une seule fissure dans une matrice infinie ayant les propriétés du matériau étudié :

$$E = \frac{P^2 a^3}{\bar{E}} f(v) : f(v) \text{ est un facteur de forme qui dépend de la géométrie de la fissure.}$$

$E$  est la contribution en énergie potentielle de fissure, la variation d'énergie potentielle est donc  $\Delta E = \Delta\phi = -\frac{P^2}{\bar{E}} \sum a^3 f(v)$ .

$$\text{Il en résulte } \frac{K}{K_0} = 1 - \frac{2Na^3}{3(1-2v)V} f(v) \quad N : \text{nombre total de micro-fissures.}$$

Afin de déterminer le module d'Young effectif dans le cas général (non-hydrostatique), appliquons une tension uniaxiale  $\sigma$  au corps fissuré (voir figure I.5 ci-après), nous obtenons alors, ainsi que précédemment :

$$-\frac{\sigma^2 V}{2\bar{K}} = -\frac{\sigma^2 V}{2K} + \Delta\phi$$

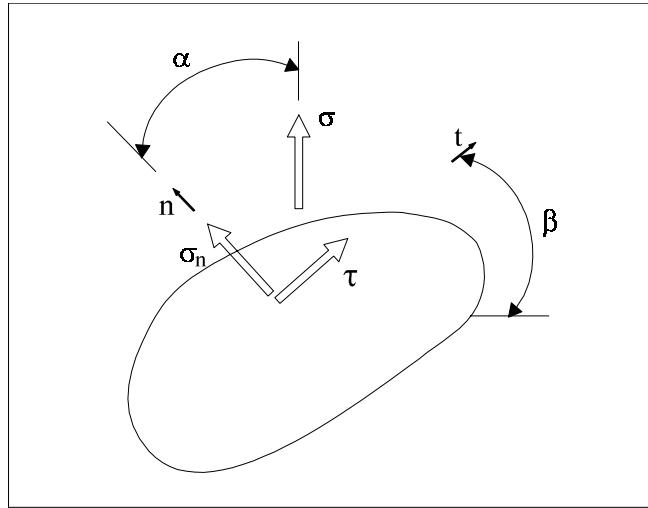


Figure I.5 : Plan de fissure et résolution de contrainte.

Considérons maintenant une fissure isolée. Soit  $n$  un vecteur normal au plan et  $t$  un vecteur du plan de fissure. Seul le calcul des contraintes normale et tangentielle  $\sigma$  et  $\tau$  peut influencer l'énergie de fissures  $E$  qui doit être une fonction quadratique de ces contraintes.

Ainsi :

$$E = \frac{a^3}{E} (\sigma^2 f(v) + \tau^2 g(v, \beta))$$

$g(v, \beta)$  est aussi un facteur de forme qui dépend de la géométrie de la fissure.

Pour simplifier par  $\sigma$ , il suffit d'écrire :  $\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha$        $\tau = \sigma \cos \alpha \sin \alpha$   
 afin d'obtenir :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{2Na^3}{V} (f(v) \cos^4 \alpha + g(v, \beta) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$ .

Avec plusieurs suppositions (statistiques) de non-corrélation sur les différents paramètres géométriques des fissures, on peut poser :  $\langle \cos^4 \alpha \rangle = \frac{1}{5}$  et  $\langle \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rangle = \frac{2}{15}$ .

Cela permet d'obtenir :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{2Na^3}{15V} (3f(v) + 2g(v, \beta))$ .

Ces équations permettent la détermination de  $K$ ,  $E$  et  $v$ , mais aussi d'autres constantes élastiques en rapport avec ces dernières.

Pour évaluer  $\frac{E}{E_0}$ , il convient tout d'abord de déterminer l'énergie de fissure, puis d'en déduire les facteurs de formes  $f$  et  $g$  pour des formes de fissures particulières.

Sachant que  $E = \frac{1-v^2}{3E_0} \int_0^{\infty} (K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-v}) dS$ , il est aisé de déterminer l'énergie de fissure.  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont les facteurs d'intensité de contraintes. Par exemple, pour une fissure elliptique en mode I,  $K_I = \frac{\sigma \sqrt{\frac{\pi b}{a}}}{E(k)} \sqrt{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}$ . On a donc  $f(v) = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{1-v^2}{E(k)}$  (en raisonnant dans le plan  $xy$ ).  $E(k)$  étant l'intégrale elliptique de deuxième espèce.

En répétant ce processus dans les plans  $xz$  et  $yz$ , nous trouvons :

$$E = \frac{4\pi \tau^2 ab^2}{3} \frac{1-v^2}{E} \left[ k(k, v) \cos^2 \beta + Q(k, v) \sin^2 \beta \right]$$

avec  $R(k, v) = k^2 \left[ (k^2 - v^2)E(k) + v k_1^2 K(k) \right]^{-1}$   $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$

$$Q(k, v) = k^2 \left[ (k^2 + v k_1^2)E(k) - v k_1^2 K(k) \right]^{-1}$$

Cela permet d'obtenir :  $g(v, \beta) = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{b^2}{a^2} \right) (1 - v_0^2) \left[ R(k, v) \cos^2 \beta + Q(k, v) \sin^2 \beta \right]$

$$\text{et } \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{16(1-v^2)}{45} \left[ 3 + E(k)(R(k, v) + Q(k, v)) \right] \varepsilon$$

avec  $\varepsilon = \frac{45}{8} \frac{v_0 - v}{(1-v^2) \left[ 2(1+3v_0) - (1-2v_0)E(k)(R(k, v) + Q(k, v)) \right]}$

En pratique,  $\varepsilon$  est assimilé à une densité de fissure. Avec cette méthode, Budiansky et O' Connell (Budiansky et O' Connell, 1976) ont obtenu les résultats de la figure I.6 avec des fissures circulaires. Pour notre étude, nous prenons, comme le préconisent Aboudi et Benveniste (Aboudi et Benveniste, 1987),  $\varepsilon = \frac{\pi N a^2}{S}$ .

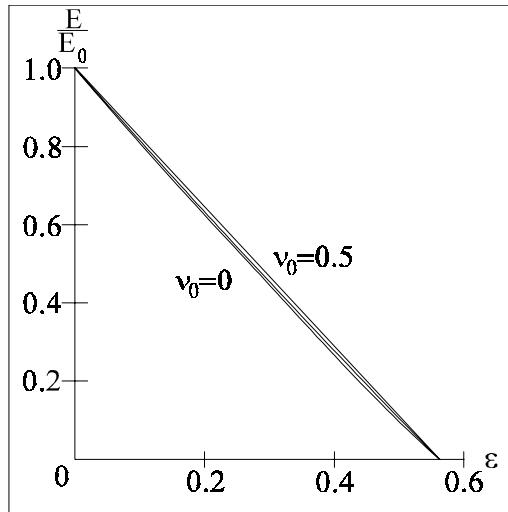


Figure I.6 : Module effectif pour des fissures circulaires.

Une caractéristique notable de la méthode auto-consistante est la prédiction de la ruine lorsque la densité de fissure avoisine 9/16. O' Connell et Budiansky (O'Connell et Budiansky, 1974 et 1976) affirment que la disparition de rigidité élastique correspond à une perte de cohérence du solide produite par un réseau de fissures en intersection lorsque la valeur critique de  $\varepsilon = 9/16$ .

### I-2-2) Extensions de la méthode

La méthode auto-consistante a été étudiée par plusieurs auteurs ; citons Wang et Ehrlacher (Wang et Ehrlacher, 1992), Lemaître et Chaboche (Lemaître et Chaboche, 1978), Sumarac et Krajcinovic (Sumarac et Krajcinovic, 1987).

Laws et Brockenbrough (Laws et Brockenbrough, 1986) ont étudié l'influence de la géométrie de la fissure sur l'endommagement. A titre d'exemple, voici les équations et les résultats de 5 géométries différentes pour  $\nu_0 = 0.25$  et  $\varepsilon = 0.05$  :

- fissures linéaires aléatoires 3D :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\pi^2}{30}(1 + \nu_0)(5 - 4\nu_0)\varepsilon$  D = 8%
- fissures circulaires aléatoires 3D :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{16(1 - \nu_0^2)(10 - 3\nu_0)}{45(2 - \nu_0)}\varepsilon$  D = 9%
- fissures linéaires aléatoires 2D :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\pi^2}{4}(1 - \nu_0^2)\varepsilon$  D = 12%
- fissures linéaires alignées :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\pi^2}{2}(1 - \nu_0^2)\varepsilon$  D = 23%
- fissures circulaires alignées :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{16}{3}(1 - \nu_0^2)\varepsilon$  D = 25%

Ainsi  $\varepsilon$  est utilisé dans les modèles d'endommagement, par exemple, d'après Budiansky (Budiansky, 1975) pour des fissures circulaires ou linéaires planes,

$$\varepsilon = \pi \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{S}, \text{ alors que pour des fissures circulaires dans l'espace : } \varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^3}{V} \text{ et pour des fissures elliptiques dans l'espace : } \varepsilon = \frac{2}{\pi V} \sum \frac{A^2}{P} = \frac{\pi}{2VE(k)} \sum_{i=1}^n a_i b_i^2.$$

En fait, ce paramètre étant adimensionnel, on peut passer des fissures elliptiques aux fissures circulaires à l'aide d'un coefficient appliqué à la densité de fissure.

Horii et Nemat-Nasser (Horii et Nemat-Nasser, 1983) ont étudié le cas des micro-fissures fermées. Ils montrent notamment une anisotropie de l'endommagement du matériau.

Hoenig (Hoenig, 1978) a appliqué la méthode auto-consistante pour des distributions de fissures elliptiques alignées. La méthode auto-consistante a été étendue à des distributions de fissures non-aléatoires. Le module d'Young effectif, dans ce cas, est transversalement isotrope (Hoenig, 1979).

Bruner (Bruner, 1976) et Henyey et Pomphrey (Henyey et Pomphrey, 1982) ont souligné que la méthode auto-consistante pouvait surestimer les interactions des fissures et ont proposé une méthode différentielle.

Kachanov et Sayers (Kachanov et Sayers, 1990) ont présenté un modèle simple pour l'évaluation du tenseur de rigidité élastique pour une distribution aléatoire de fissures avec une densité de fissure finie. L'approche est fondée sur la transformation tensorielle des constantes effectives élastiques pour une orientation statistiquement isotrope, cela à l'aide d'un tenseur du second ordre de densité de fissure. Cette méthode utilise comme données les prédictions de la méthode différentielle. Ces auteurs proposent pour la modélisation macroscopique une fonction d'énergie libre :

$$f(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2} M_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} M_{ijkl}^0 \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \eta_1 \text{tr}(\sigma) \text{tr}(\sigma \bullet \alpha) + \eta_2 \text{tr}(\sigma \bullet \sigma \bullet \alpha)$$

$\alpha$  joue ici le rôle d'une densité de fissure ; il constitue en fait une généralisation tensorielle de  $\varepsilon$ .

### **I-3) Conclusion**

Actuellement, tous les travaux effectués ont essentiellement traité des fissures ouvertes et non pas des fissures fermées comme a pu le faire Nemat-Nasser en compression. De plus, les modèles ne savent pas encore tenir compte d'une interaction forte. Par ailleurs, le cas réel isotrope correspond bien évidemment à une distribution aléatoire de fissures.

Or beaucoup d'études sont fondées sur des méthodes qui ne peuvent s'exploiter qu'avec des distributions bien spécifiques de fissures, donc alignées et corrélées ce qui exclut toute propriété d'isotropie initiale. Remarquons au passage les travaux de Hoenig (Hoenig, 1978) qui ont exclusivement porté sur des fissures sèches ou saturées mais aléatoirement orientées.

Cependant, lors de cette étude bibliographique nous avons constaté une grande diversité des résultats sur les modules effectifs. Il est alors nécessaire de pouvoir mettre au point un outil de calcul numériquement fiable capable de valider ou d'invalider avec certitude les résultats des études précitées. Cet outil doit être assez souple afin de pouvoir traiter des distributions aléatoires ou non, calculer dans un milieu fini ou infini et de pouvoir prendre en compte l'anisotropie du matériau.

Ce sont les conditions que remplit la méthode des discontinuités de déplacements. Pour ce faire, il a fallu concevoir un générateur aléatoire de micro-fissures qui puisse tout de même créer une distribution corrélée.

La méthode de discontinuités de déplacements que nous utilisons est une méthode de type équation intégrale et donc assez différente des méthodes par éléments finis. Elle est due à Crouch et Starfield (Crouch et Starfield, 1983).

Cette méthode est de type indirect car elle fait intervenir des variables auxiliaires qui sont les discontinuités de déplacements. Ceci est un avantage particulier pour l'étude des milieux fissurés.

## II-1) La méthode des discontinuités de déplacements

Beaucoup de problèmes en mécanique des solides font intervenir des surfaces de discontinuité. Une fissure, par exemple, possède deux surfaces ou frontières, l'une coïncidant avec l'autre. La méthode des discontinuités de déplacements semble bien appropriée à l'étude des milieux fissurés.

Cette méthode est fondée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité constante en déplacement le long d'un segment de droite fini dans le plan  $x,y$  d'un solide élastique infini. Physiquement, nous pouvons imaginer la discontinuité de déplacement comme une fissure linéaire dont la surface opposée se serait déplacée relativement par rapport à l'autre. Dans le cas présent, les surfaces se déplacent relativement d'une quantité constante le long de la fissure. En général, il est possible de considérer une distribution arbitraire de déplacements relatifs (linéaires ou quadratiques).

Ensuite, il suffit de diviser la fissure en  $N$  éléments frontière et de prendre la discontinuité de déplacement constante sur chacun des éléments. Connaissant la solution analytique pour une discontinuité de déplacement élémentaire constante, la solution du problème est trouvée en additionnant les effets des  $N$  éléments.

Le problème de la discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite fini dans le plan  $x,y$  d'un solide élastique infini est caractérisé par la condition suivante : les déplacements sont continus partout excepté en dehors du segment de droite en question. Le segment de droite est ainsi défini :  $|x| \leq a$ ,  $y = 0$ . Les deux surfaces (positives et négatives) sont distinguées ainsi :  $y = 0_+$  et  $y = 0_-$ . Puis, nous définissons la discontinuité de déplacement  $D_i$  comme la différence de déplacement entre les deux faces du segment :

$$D_i = u_i(x_1, 0_-) - u_i(x_1, 0_+) \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} D_x &= u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \\ D_y &= u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) \end{aligned}$$

Parce que  $u_x$  et  $u_y$  sont positifs dans les directions des  $x$  et des  $y$  positifs,  $D_x$  et  $D_y$  sont positifs comme sur la figure II.1.

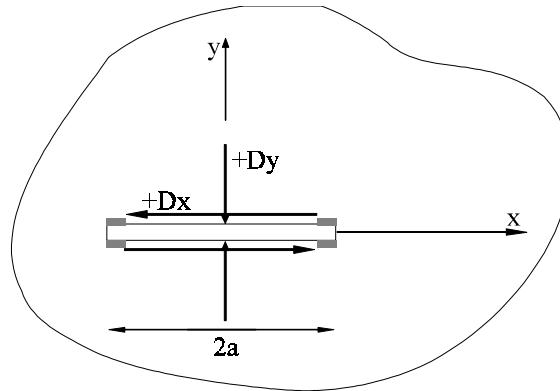


Figure II.1 : Les composantes de la discontinuité de déplacement constante.

Indiquons tout de suite que le contour du solide doit être discréteisé dans le sens trigonométrique. Par ailleurs, les conventions de signe sur les contraintes sont les suivantes : + signifie traction et - signifie compression.

La solution de ce problème a été donnée par Crouch (Crouch, 1976) :

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[ \frac{1}{\sqrt{y}} \left( \tan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right] \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_x &= -\frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[ \frac{1}{\sqrt{y}} \left( \tan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right] \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ \sigma_{xx}(x, 0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

Ainsi  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  dépendent uniquement de la composante normale  $D_y$ , alors que la contrainte tangentielle  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  dépend uniquement de la composante transverse  $D_x$ . Notons aussi que la contrainte résultante appliquée à la fissure ouverte est nulle :  $t_i(x, 0) = t_i(x, 0_+) + t_i(x, 0_-) = 0$ .

Expliquons maintenant la procédure numérique. Les discontinuités élémentaires de déplacements sont définis en coordonnées locales  $s$  et  $n$ . Au  $j$  ème élément, ces quantités sont définies ainsi :

$$D_s^j = u_s^- - u_s^+ \quad D_n^j = u_n^- - u_n^+$$

Les signes + et - correspondent aux surfaces positives et négatives. Puis les contraintes normales et tangentielles au milieu du  $i$  ème élément sont exprimées en terme de discontinuités de déplacement au  $j$  ème élément :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \int_Y \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \int_{\Omega} \end{aligned}$$

Dans le cas de l'auto-influence où les intégrales doivent être régularisées, on obtient :

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad A_{nn}^{ii} = A_{ss}^{ii} = \frac{G}{\pi(1-v)a}$$

Il en est de même pour les déplacements relatifs aux directions  $s$  et  $n$  :

$$\begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \int_Y \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \int_{\Omega} \\ B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} &= 0 \quad B_{nn}^{ii} = B_{ss}^{ii} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \rightarrow 0_+ \\ \frac{1}{2} & \text{si } n \rightarrow 0_- \end{cases} \end{aligned}$$

Les coefficients  $\bar{A}^{ij}$  et  $\bar{B}^{ij}$  sont les coefficients d'influence aux frontières. Le coefficient  $\bar{A}_{ns}^{ij}$ , par exemple, donne l'influence de la contrainte normale au milieu du  $i$  ème élément ( $\sigma_n^i$ ) due à une discontinuité de déplacement tangentiale unité sur le  $j$  ème élément ( $D_s^j = 1$ ). Ces coefficients sont développés à partir de la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite arbitrairement orienté dans un solide infini, comme nous pouvons le constater sur la figure II.2 :

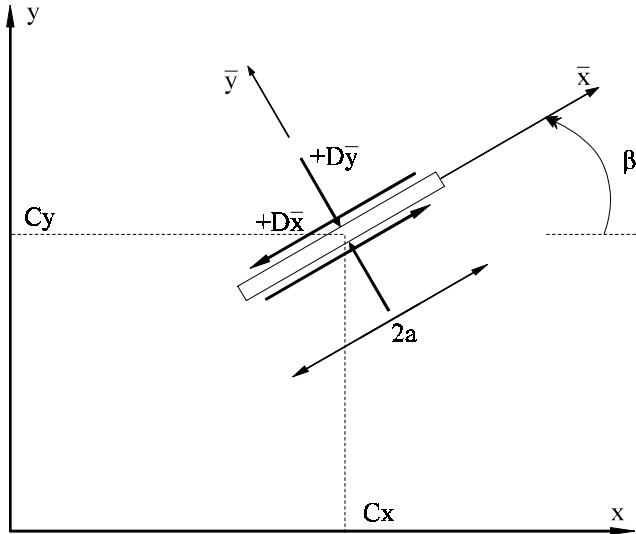


Figure II.2 : Discontinuité de déplacement sur un segment de droite arbitraire.

Les déplacements et contraintes que l'on recherche sont exprimées dans un repère local d'axes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  :

$$u_{\bar{x}} = D_{\bar{x}} [2(1-\nu)\bar{F}_3 - \bar{y}\bar{F}_5] + D_{\bar{y}} [-(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4]$$

$$u_{\bar{x}} = D_{\bar{x}} [(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4] + D_{\bar{y}} [2(1-\nu)\bar{F}_3 + \bar{y}\bar{F}_5]$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = 2GD_{\bar{x}} [2\bar{F}_4 + \bar{y}\bar{F}_6] + 2GD_{\bar{y}} [-\bar{F}_5 + \bar{y}\bar{F}_7]$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = 2GD_{\bar{x}} [-\bar{y}\bar{F}_6] + 2GD_{\bar{y}} [-\bar{F}_5 - \bar{y}\bar{F}_7]$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = 2GD_{\bar{x}} [-\bar{F}_5 + \bar{y}\bar{F}_7] + 2GD_{\bar{y}} [-\bar{y}\bar{F}_6]$$

Les fonctions  $\bar{F}_2$  à  $\bar{F}_7$  sont données dans l'ouvrage de Crouch et Starfield (Crouch & Starfield, 1983).

En effectuant un changement de repère afin de tout exprimer dans le repère principal d'axes  $x$  et  $y$ , cela conformément à la représentation schématique précédemment donnée. En tenant compte de l'orientation des éléments influents et influés, on aboutit à un système d'équation du type :

$$b_s = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \quad \sum_{i=1}^N \quad \Omega$$

$$b_n = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \quad \sum_{i=1}^N \quad \Omega$$

Par ailleurs, les symétries axiales peuvent être prises en compte dans la méthode. Enfin, les programmes donnent les solutions extérieures et intérieures du problème. Cela peut être représenté comme sur la figure II.3 :

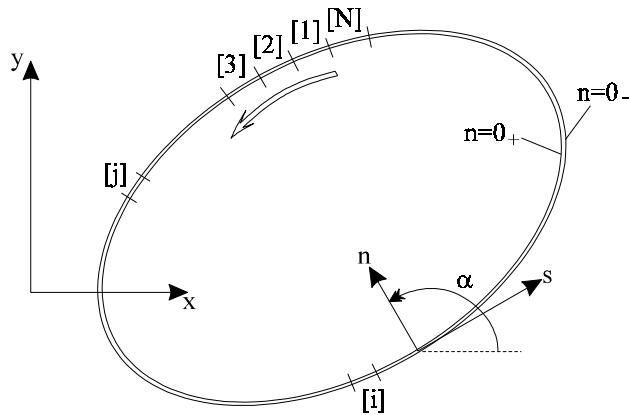


Figure II.3 : Représentation d'un contour fermé.

Ajoutons enfin que les conditions aux limites peuvent être placées à l'infini ou sur l'élément selon le choix de l'utilisateur.

Les listings des programmes de simulation numérique sont fournis en annexes à la page 6.

## II-2) Le générateur aléatoire de fissures

Pourquoi avoir choisi une distribution aléatoire de fissures ? Tout d'abord, parce que beaucoup d'études ont déjà été effectuées sur des distributions orientées. Cela était souvent dû aux faiblesses des méthodes de résolution analytique employée. Mais n'oublions pas que la distribution réelle des fissures des matériaux rocheux est plutôt aléatoire que corrélée.

L'un des deux problèmes qui doit être résolu à l'aide de ce générateur aléatoire de fissures est justement son caractère purement aléatoire. En effet, cela est primordial, car dans le cas contraire les résultats seraient entachés d'une corrélation certaine.

Or, nos études étant exclusivement réalisées sur ordinateur, pouvons-nous être certain que tous les nombres sont générés au hasard ? Il convient, à ce stade, de se méfier des algorithmes de congruence sur lesquels sont fondées toutes les procédures aléatoires. En effet, chaque langage informatique possède une fonction aléatoire appelée *RANDOM*.

Cette fonction renvoie effectivement un nombre au hasard à chaque fois qu'un nombre différent lui est fourni comme paramètre donnée. Le problème est alors déplacé : les paramètres résultats sont aléatoires pour peu que les paramètres

données le soient aussi. A moins d'avoir besoin qu'une seule fois de la fonction aléatoire, ce n'est donc pas suffisant. En informatique, il existe une seule façon d'utiliser une séquence aléatoire de nombre : il faut initialiser la fonction *RANDOM* avec la partie tronquée du temps en 100<sup>ème</sup> de seconde.

En effet, chaque ordinateur possède maintenant une horloge interne très précise qui peut donc fournir un nombre aléatoire à deux chiffres. De cette façon, à chaque fois que cette fonction aléatoire est utilisée, elle produira une séquence purement aléatoire de nombres. Mais, il subsiste encore une possibilité de dysfonctionnement : si l'intervalle de temps qui sépare les appels consécutifs de cette routine est inférieur au 100<sup>ème</sup> de seconde, les paramètres résultats seront identiques : avec les co-processeurs actuels, cela n'aurait rien d'étonnant.

Le programme conçu utilise des doubles boucles dans lesquelles de nombreux calculs sont effectués pour tester l'intersection éventuelle des fissures entre elles. De plus, tout cela est inclus dans une boucle *répéter jusqu'à* qui rallonge encore le temps de calcul (pour une fois c'est avantageux).

Enfin, précisons que ce programme permet de déterminer aléatoirement toutes les caractéristiques géométriques des fissures : coordonnées  $x$  et  $y$ , orientation et taille ( $2a$ ). Cependant, nous avons préféré garder la taille des fissures constantes parce que cela simplifiait le calcul de la densité de fissuration.

Cette densité est le paramètre essentiel de notre étude. Or, nous savons qu'il dépend directement de la demi-taille  $a$  d'une fissure. De plus, afin de pouvoir démontrer la corrélation entre  $a$  et  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = f(a^2)$ ), il était essentiel de travailler avec une taille constante.

Par ailleurs, la seconde difficulté à surmonter était la visualisation à l'écran de la génération effectuée. Cela permet notamment de se rendre compte si les fissures sont trop proches les unes des autres, ce qui induirait une interaction fortement ressentie au niveau de la précision des résultats.

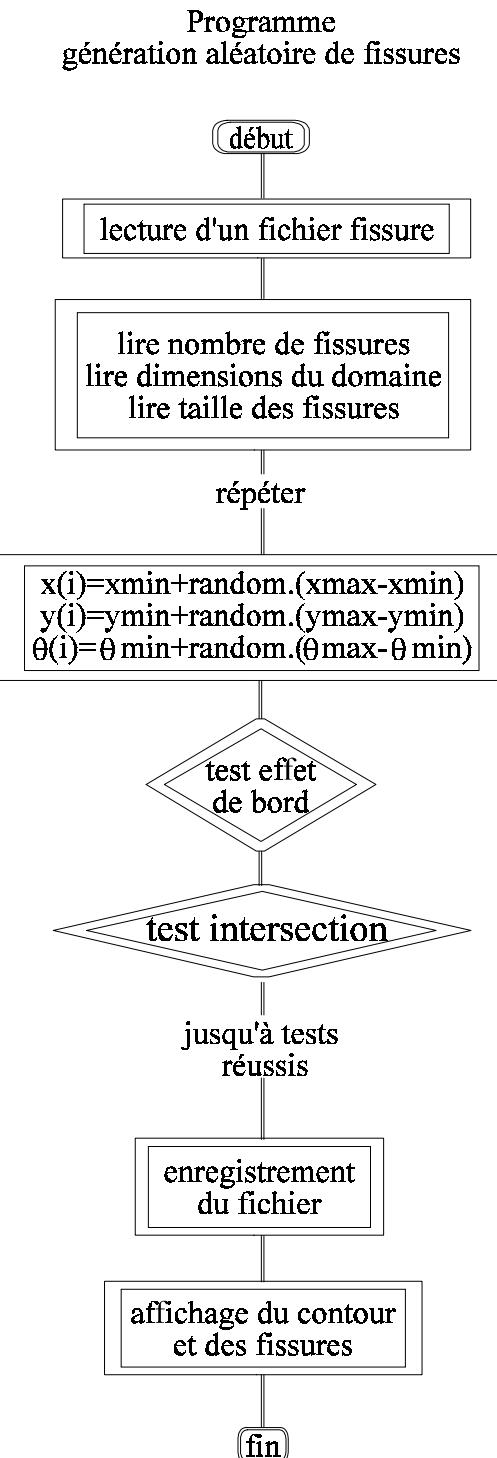
Sachant enfin que le langage Turbo-Pascal (version 6.0) intègre une bibliothèque complète de routines graphiques et possède une fonction *RANDOM* qui s'initialise automatiquement sur l'horloge interne de l'ordinateur, il apparaissait évident d'écrire ce programme dans ce langage plutôt qu'en Fortran.

Par contre, le choix du Turbo-Pascal n'interdit pas la compatibilité avec le Fortran. D'ailleurs, les codes de calcul mis au point en Fortran lisent les fichiers texte ainsi créés. L'autre avantage du fichier non typé (texte) est que l'on peut facilement l'éditer pour changer des paramètres géométriques sans refaire la

génération de fissures. Ainsi, si l'on veut garder le même aspect d'une distribution de fissures, il suffit de changer la taille dans le fichier.

De plus, une ébauche de visualisation d'ouverture de fissures ou de cavités ainsi que la déformation du contour ont été effectuées. Cela n'a pas beaucoup d'intérêt pour le moment puisque nous avons discréétisé les fissures en un seul élément. Ce logiciel tient compte de l'effet de bord : les fissures sont éloignées du contour d'au moins leurs tailles ce qui évite des perturbations numériques. Et enfin, il est possible de contrôler l'éloignement mutuel des fissures par l'intermédiaire d'un coefficient devant être supérieur à 1.

Sans rentrer dans les détails de la programmation, un algorithme simplifié du générateur aléatoire de fissures (qui permet, avec de légères modifications, de générer des populations corrélées) est présenté à la page suivante. Le listing de ce programme en Turbo-Pascal est fourni en annexes à la page 1.



Les techniques de programmation concernant purement la traction et la compression seront abordées au chapitre suivant avec les résultats qui en découlent.

### II-3) Application à l'évaluation du module effectif : cas de la traction

Les premiers calculs ont porté sur l'évaluation du module d'Young effectif sous sollicitation de traction uniaxiale. Sous l'effet des contraintes de traction uniaxiale, les fissures s'ouvrent (figure II.4).

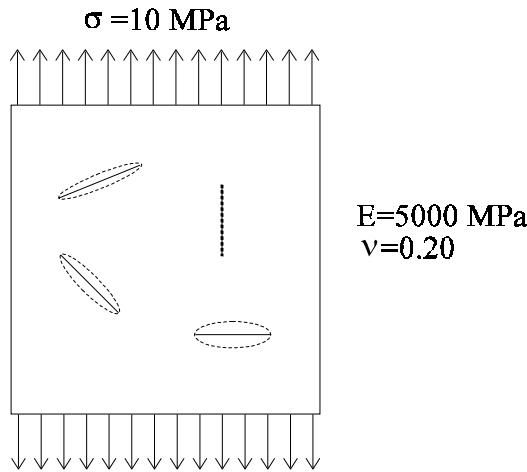


Figure II.4 : Ouverture des fissures en traction.

Dans ce cas, on parle d'endommagement direct. Si le mécanisme physique est fort simple, il en est de même en ce qui concerne la méthode numérique d'évaluation du module d'Young axial. Pour l'évaluation du module d'Young effectif  $E$ , il convient de faire les hypothèses suivantes :

- il n'y a pas de fortes interactions de fissures,
- la déformation est homogène dans le milieu,
- le comportement du solide est élastique linéaire.

Cela nous permet d'effectuer le calcul de  $\varepsilon_{11}$  sur le contour carré du solide en traction. Les déplacements verticaux (dans la direction 11) sont sommés sur un huitième de contour. En effet, nous travaillons en double symétrie (figure carrée) et les déplacements verticaux ne sont utiles que sur la face horizontale du solide :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sum_{i=1}^N u_y^+(i)}{NL} \quad \text{où } N \text{ est le nombre de divisions sur un demi-côté et } L \text{ la longueur du demi-côté. Le module d'Young effectif est obtenu par : } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{11}}$$

Tous les calculs ont été effectués pour des divisions par demi-côté allant de 6 à 40. Cela permet de vérifier la convergence des résultats. Il s'est en effet avéré que lorsque les résultats étaient peu précis, cela signifiait une interaction ou une perturbation numérique due à une distance trop faible entre deux fissures.

Cela montre aussi la bonne précision de cette méthode où les modules sont quasi identiques à 6 et à 40 divisions par demi-côté. Il est d'ailleurs possible de s'en rendre compte sur les graphiques présentés en annexes ; 9 courbes corrigées sont superposées sans que l'on puisse pratiquement en distinguer l'une de l'autre.

Par ailleurs, 5 tailles de fissures différentes ont été étudiées : de 0.01 à 0.20 pour un quart de domaine carré de coté 1.00. En théorie, au-delà d'une taille de 0.05, il ne s'agit plus de micro-fissures, mais plutôt de macro-fissures. Cependant, si nous voulons atteindre des densités de fissuration conséquentes, il faut soit un grand nombre de fissures de taille 0.01, soit une grande taille de fissure (0.20 par exemple).

En effet, la densité de fissuration varie avec le carré de la demi-longueur. Or, un grand nombre de fissures nécessite beaucoup d'emplacement mémoire et implique un temps de calcul très (voire trop) élevé avec un risque croissant d'erreur numérique. En effet, les méthodes d'inversion demandent environ  $N^3/6$  calculs élémentaires, et plus il y a de calculs, plus on perd en précision.

Ensuite, il suffit de répéter le même procédé pour déterminer  $\varepsilon_{22}$ . Ainsi, on obtient le coefficient de Poisson, puisque  $\nu = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$  et  $\varepsilon_{22} = \frac{\sum_{i=1}^N u_x^+(i)}{NL}$ .

### II-3-1) Distribution aléatoire

Il s'agit de l'étude principale où 5 tailles de fissures ont été étudiées :

- tailles 0.01, 0.02 et 0.05 de 0 à 20 fissures par incrément de 2 et de 20 à 100 fissures par incrément de 20,
- tailles 0.10 et 0.20 de 0 à 20 fissures par incrément de 2.

Chacun de ces cas a été traité avec des divisions par demi-côté variant de 6 à 40. Quelques exemples de ces résultats sont présentés en annexes à partir de la page 57. Nous ne présentons ici que le graphique d'endommagement en fonction de la densité de fissuration pour les 5 tailles simultanées (étant donné que  $\varepsilon$  est lui-même fonction de la demi-taille des fissures).

Sur le graphique II.5, nous avons comparé nos résultats à ceux fournis par la méthode auto-consistante de Budiansky et O' Connell (Budiansky et O' Connell, 1976) :  $\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\pi^2}{30} (1 + \nu_0) (5 - 4\nu_0) \varepsilon$  soit, en fait,  $D = \frac{\pi^2}{30} (1 + \nu_0) (5 - 4\nu_0) \varepsilon$ . Comme nous pouvons le constater, les résultats numériques sont en accord avec ceux de Budiansky et O'Connell : le coefficient de corrélation est égal à 0.98.

Par contre, d'autres relations ont été testées, celles de Wang & Ehrlacher (Wang & Ehrlacher, 1992) et Laws & Brockenbrough (Laws & Brockenbrough, 1987) notamment, les pentes des droites étant deux fois trop faibles, nous n'avons

pas jugé nécessaire de superposer ces formules que nous jugeons donc comme non représentatives du phénomène observé.

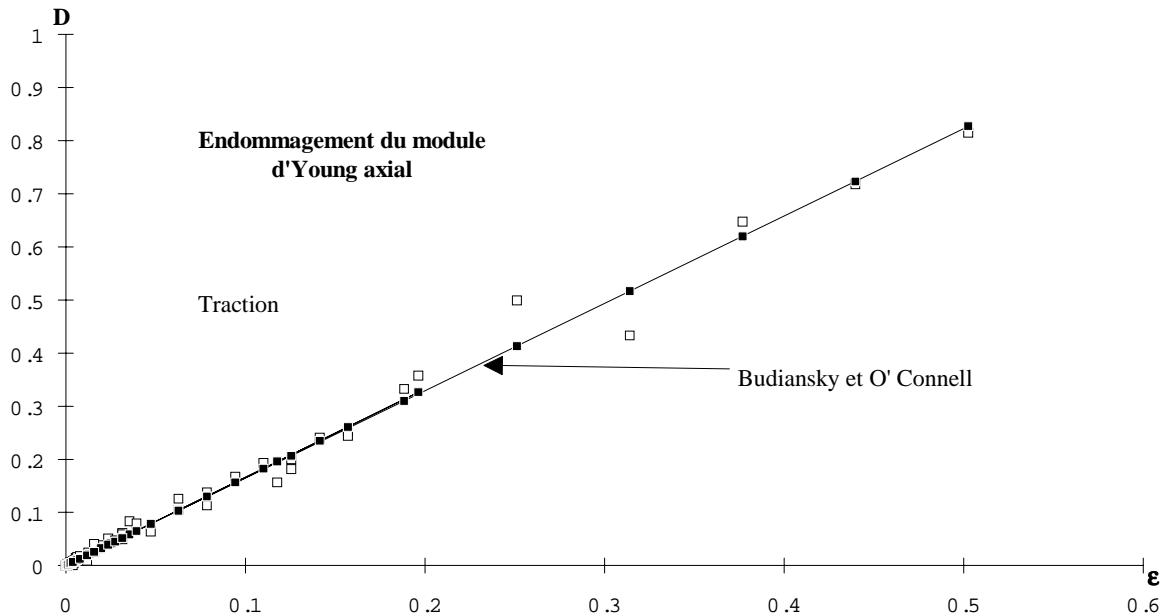


Figure II.5 : Endommagement du module d'Young axial en traction en fonction de  $\varepsilon$

De la même façon que nous calculons la variation du module d'Young, nous pouvons calculer celle du coefficient de Poisson qui est l'autre paramètre élastique du matériau. D'un point de vue pratique, l'endommagement de  $E$  provient de l'accroissement de  $\varepsilon_{11}$  et donc des  $u_y^+(i)$ . Il apparaît tout aussi logique que  $\varepsilon_{22}$  décroisse et que, par conséquent, on puisse calculer la variation de  $v$ .

L'unique relation dans la littérature concernant la variation de  $v$  (Sumarac et Krajcinovic par exemple) est :  $\frac{v}{v_0} = \frac{1-\varepsilon}{1-v_0\varepsilon}$  ou  $1 - \frac{v}{v_0} = \frac{(1-v_0)\varepsilon}{1-v_0\varepsilon}$ .

Cependant, il convient d'être prudent sur  $v$ , car ce paramètre, dans le code de calcul, tient compte de l'endommagement de  $E$ . En effet,  $v = \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{22}$ , donc  $\frac{v_{\text{réel}}}{v_0} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^0} = \frac{vE_0}{EV_0}$ . Or  $\frac{E_0}{E} = \frac{1}{1-D}$  donc, en fait,  $v_{\text{réel}} = \frac{v}{1-D}$ .

Comme on peut s'en rendre compte sur la figure II.6, cette relation donne une pente deux fois trop forte par rapport à l'imaginaire droite de régression de nos résultats expérimentaux.

La comparaison de nos résultats avec ceux de Sumarac et Krajcinovic (Sumarac et Krajcinovic, 1987) montre un écart important. En effet, nous constatons une faible variation du coefficient de Poisson.

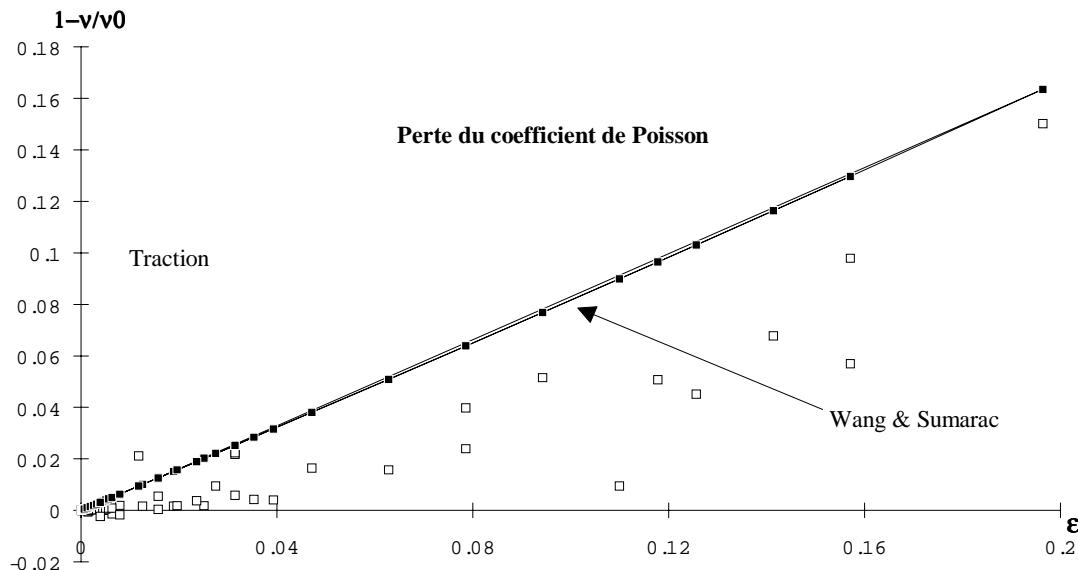


Figure II.6 : Variation du coefficient de Poisson en traction.

D'autre part, nous nous sommes attachés à vérifier que la densité de fissuration reste le paramètre déterminant en traction même avec une distribution de micro-fissures aléatoires en taille. La figure II.7 montre que l'endommagement varie toujours linéairement en fonction de  $\epsilon$ .

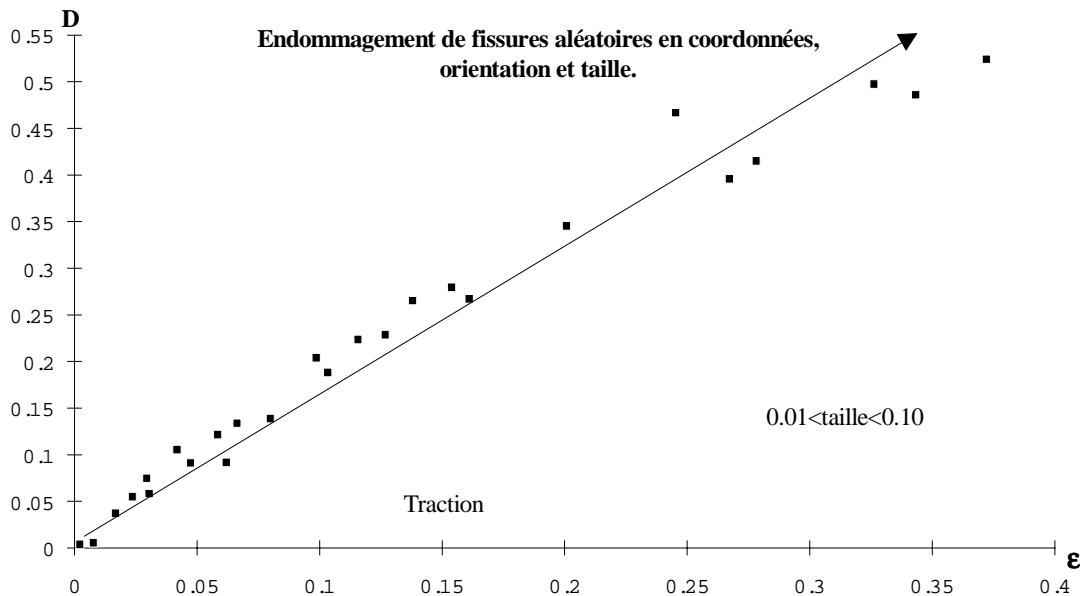


Figure II.7 : Endommagement de fissures aléatoires en coordonnées, taille et orientation.

### II-3-2) Distribution corrélée

Lorsque les fissures ne sont pas distribuées aléatoirement dans le milieu, c'est à dire quand elles sont positionnées et orientées de telle façon que l'endommagement soit maximal, nous retrouvons un résultat prédit par Laws et Brockenbrough (Laws et Brockenbrough, 1987) à l'aide de la méthode auto-consistante : l'endommagement corrélé est le double de l'endommagement aléatoire (figure II-8).

Cependant, comme nous pouvons le remarquer sur cette figure, cette constatation n'est valable que pour des densités de fissurations faibles ( $< 0.2$ ), ce qui correspond d'ailleurs aux limites de la méthode auto-consistante qui ne prend pas en compte les effets d'interaction.

Nous remarquons par ailleurs que les deux courbes convergent vers le même point qui a pour abscisse  $\epsilon_c$ , la densité critique. En plus de souligner les faiblesses de la méthode auto-consistante, ce résultat montre que la ruine du matériau est atteinte pour la même densité de fissures, que ce soit avec une configuration corrélée d'orientation optimale ou avec une distribution purement aléatoire en coordonnées et en orientation. L'interaction entre micro-fissures semble atténuer l'effet de l'orientation de ces défauts.

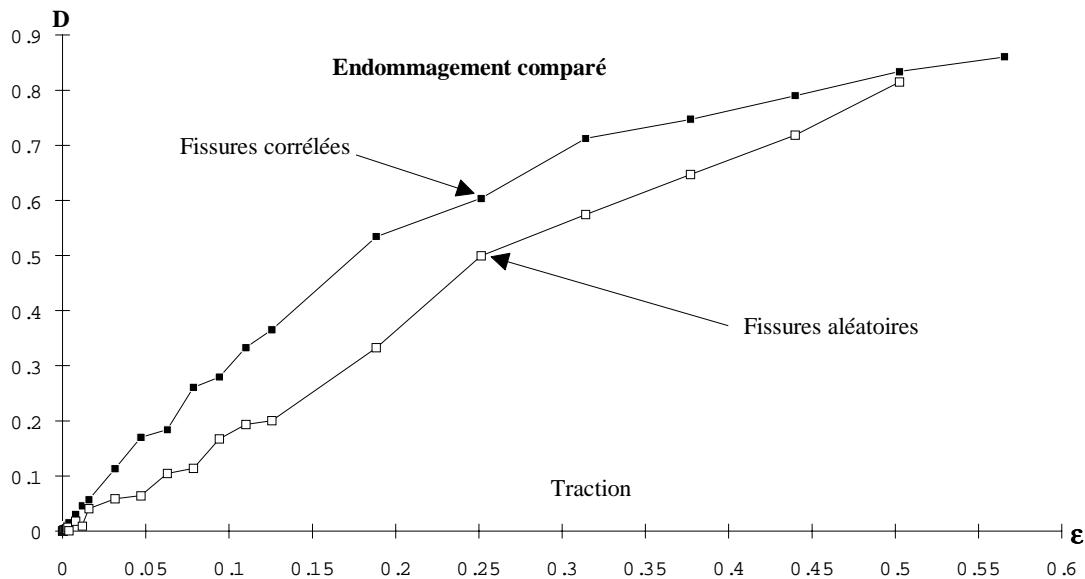


Figure II-8 : Endommagements aléatoires et corrélés en traction

### II-3-3) Fissures concentrées dans une bande

Les ruptures dans les matériaux multifissurés résultent couramment d'une localisation de déformations dans une bande quasi perpendiculaire à la contrainte de traction uniaxiale. Il est ainsi intéressant d'étudier les propriétés du matériau lorsque les fissures sont distribuées aléatoirement ou non dans une bande. Cela peut être ainsi représenté (figure II.9) :

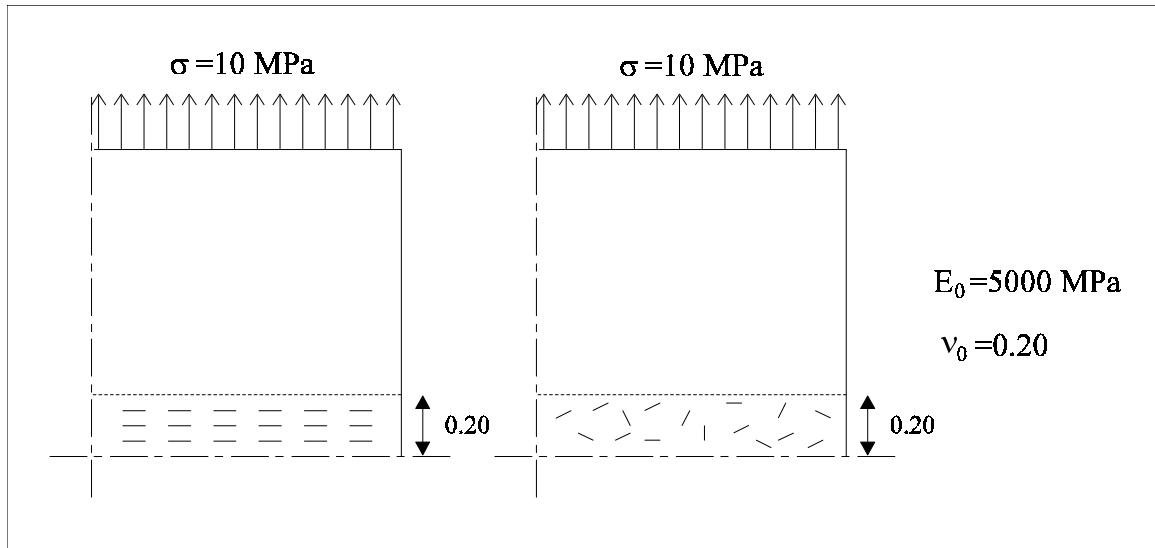


Figure II.9 : Représentation du solide fissuré dans une bande.

Sur la figure II.10, nous constatons que l'endommagement est beaucoup plus élevé lorsque les fissures sont concentrées dans une bande étroite. En fait,  $D$  est plus de deux fois plus élevé que dans le cas diffus (figure II.6).

On observe aussi que  $D$  est plus élevé lorsque les fissures sont orientées. Cela est logique puisqu'il s'agit d'une orientation perpendiculaire à la direction de la sollicitation de traction qui permet à la fissure de s'ouvrir au maximum.

Ceci est en accord avec l'approximation faite par Budiansky et O' Connell (Budiansky et O' Connell, 1976) dans leurs travaux sur les distributions aléatoires. Théoriquement,  $\varepsilon$  devrait aussi dépendre de  $\theta$  puisque, lorsque les fissures sont verticales, l'endommagement sera minimal au contraire d'une distribution horizontale. Cette dépendance vis à vis de  $\theta$  n'étant plus nécessaire lorsque les fissures sont nombreuses et distribuées aléatoirement.

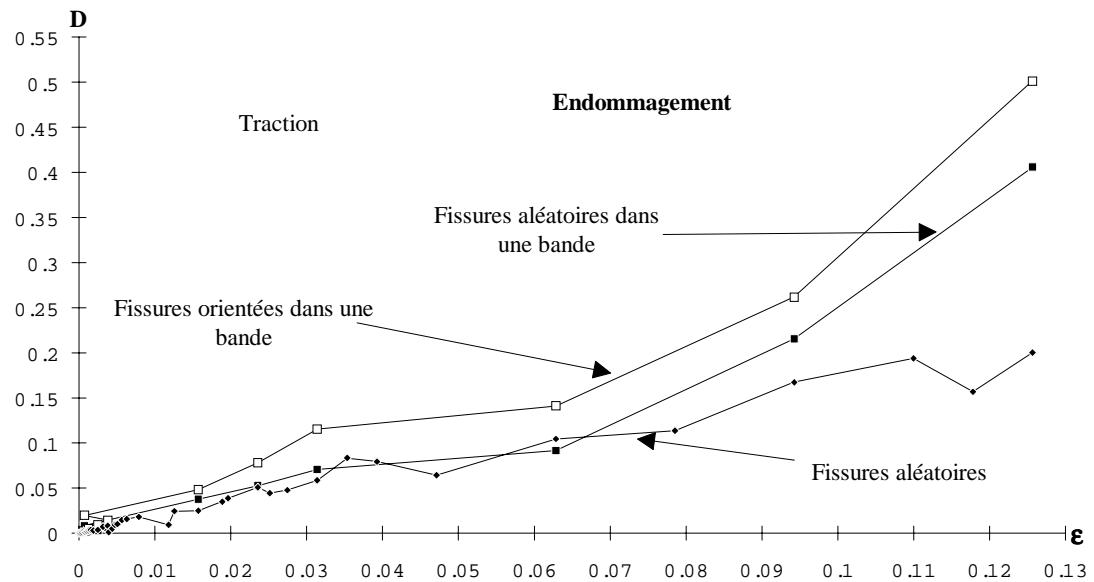


Figure II.10 : Comparaison d'endommagements en traction.

Peu de travaux théoriques ont été effectués dans le domaine de la compression (Horii et Nemat-Nasser, 1983) bien qu'il s'agisse à la fois du cas le plus intéressant et du cas le plus courant. La raison essentielle semble être l'extrême difficulté à prendre en compte le frottement sur les lèvres des fissures fermées ainsi que l'évolution de celles-ci. A ce propos, nous devons mentionner les travaux de M. Kachanov (Kachanov , 1982a, 1982b).

### III-1) Généralités et premiers résultats

La simulation numérique de la compression est beaucoup plus complexe que celle de la traction. Auparavant, il suffisait de résoudre un système matriciel par la méthode de Gauss en simple précision, maintenant la complication vient du fait que les fissures se ferment partiellement ou totalement. Cela signifie que nous ne connaissons pas les contraintes normales et tangentielles qui s'exercent sur les fissures ; il s'agissait auparavant de contraintes nulles étant donné que les fissures s'ouvraient.

Dans le cas de fissures fermées, il est nécessaire d'introduire une loi de contact. L'hypothèse d'un critère de frottement de type Coulomb a été faite. Cela revient à poser : si  $|\sigma_s| > |\sigma_n|$  alors  $\sigma_s = \mu \sigma_n \times \text{signe}(\sigma_s)$ . Du fait de la fermeture des fissures, de l'hypothèse de non-interpénétration ( $D_n$  non positive) et de la prise en compte du frottement, la résolution numérique ne peut se faire que de manière itérative. Une méthode itérative de type Gauss-Seidel avec relaxation a été retenue dans cette étude. Toutes les conditions sont réunies pour que les calculs convergent rapidement vers la solution. La procédure numérique à suivre est maintenant claire :

- 1) résoudre le système sans fissures (contour seul),
- 2) calculer  $\sigma_n$  et  $\sigma_s$  sur les fissures,
- 3) résolution itérative du système contour+fissures avec le critère de Coulomb et avec  $\sigma_n$  et  $\sigma_s$  comme conditions aux limites en contraintes sur les fissures.

Ajoutons qu'il est maintenant nécessaire de travailler en double précision pour obtenir des résultats valables, même si le test d'arrêt pour la convergence est fixé à  $10^{-8}$  soit  $|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq 10^{-8}$   $i=1, N$ . Par ailleurs, les distributions de fissures sont rigoureusement les mêmes que celles de l'étude en traction.

Malgré la double précision, les résultats présentés sur la figure III.1 montrent une plus grande dispersion. Celle-ci peut être due au critère de frottement qui introduit des dissipations dans le milieu.

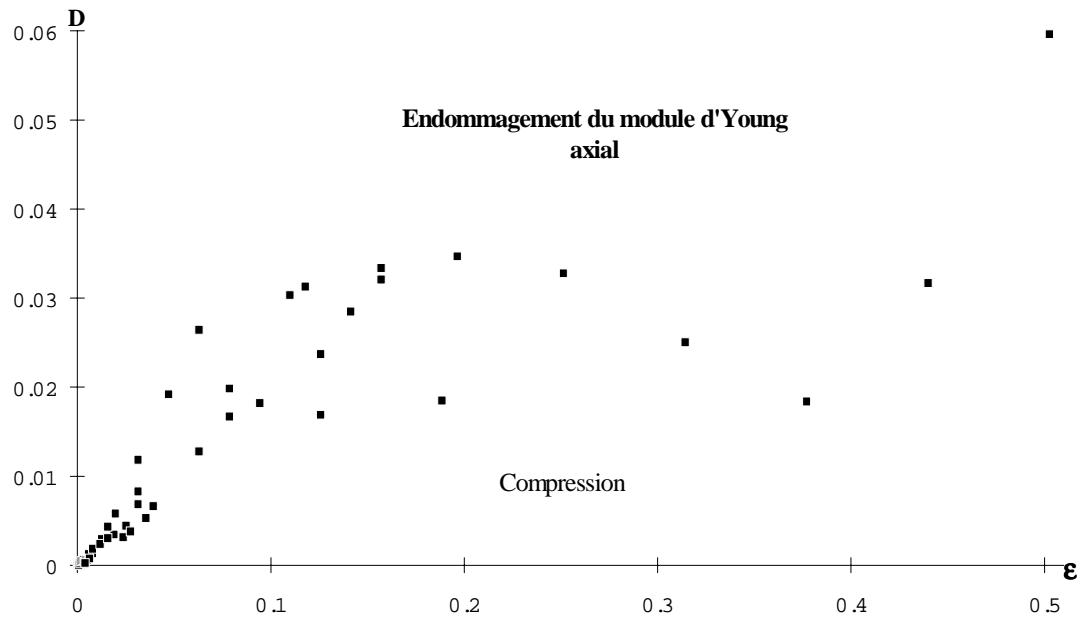


Figure III.1 : Endommagement du module d'Young axial en compression.

On peut remarquer que l'endommagement en compression est considérablement plus faible qu'en traction :  $9 < \frac{D_{\text{traction}}}{D_{\text{compression}}} < 16$ .

Un des aspects importants de l'endommagement en compression est son anisotropie. En effet, la fermeture des micro-fissures privilégie certaines orientations. Cela a pour conséquence une différence importante entre le module effectif axial et la raideur effective latérale  $K$ . Un artifice de calcul a été nécessaire pour déterminer  $K$ . Il est calculé à partir de deux états comme l'indique la figure III.2 :

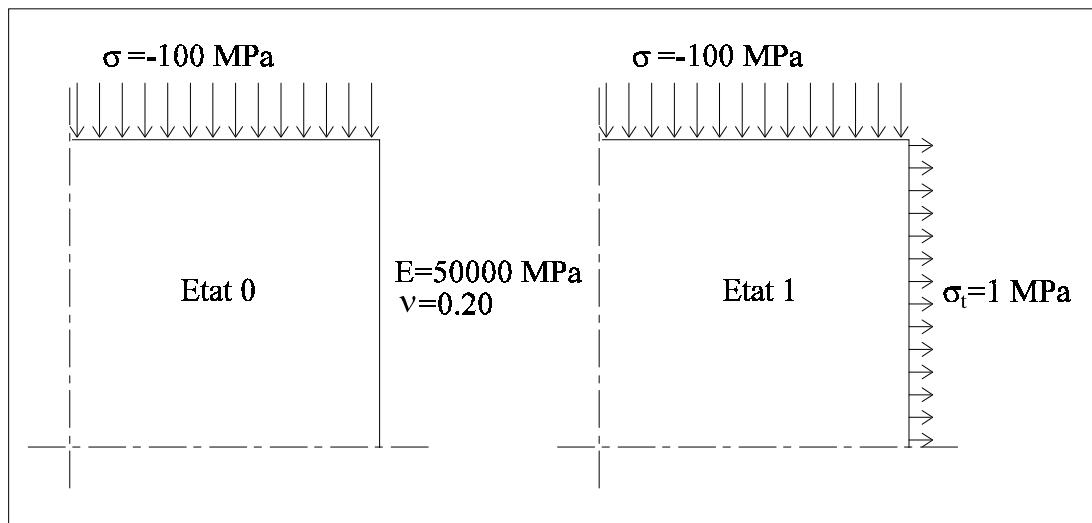


Figure III.2 : Les deux états pour le calcul de la raideur latérale  $K$ .

Puis  $K$  est évalué à l'aide de la relation suivante :  $K = \frac{\sigma_t}{\epsilon_{22}^1 - \epsilon_{22}^0}$ . Pour que cette astuce fonctionne, il faut prendre  $\sigma_t$  assez petit (comme un incrément). Là encore, la double précision est nécessaire puisque le dénominateur de la division résulte de la différence de deux quantités très faibles qui avoisinent  $10^{-6}$ . La fiabilité de cette méthode a aussi été testée sur un cas sans fissure : les résultats ont montré logiquement que  $E_{\text{axial}} = K_{\text{latéral}}$ . Les résultats (figure III.3) montrent que l'endommagement de la raideur latérale est plus de 4 fois plus élevé que  $E_{\text{axial}}$ .

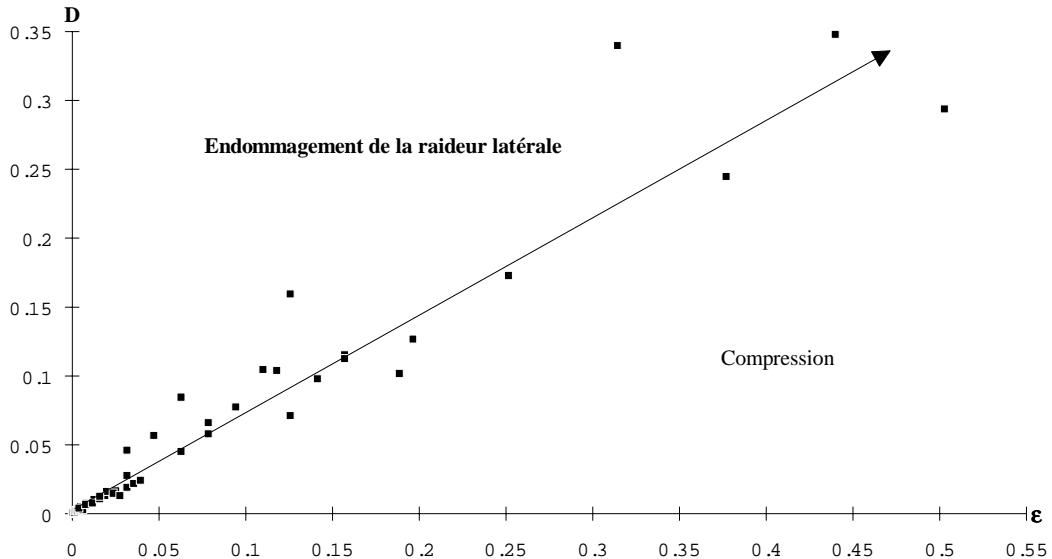


Figure III.3 : Endommagement de la raideur latérale en compression en fonction de la densité de fissuration.

Comme dans le cas de la traction au second chapitre (figure II.7), nous avons élargi le champ d'investigation en distribuant aléatoirement la taille des microfissures. Il s'agit ici de montrer que l'endommagement de la raideur latérale et du module d'Young axial du solide multifissuré varie toujours linéairement en fonction de la densité de fissuration (figure III.5). Cette distribution totalement aléatoire est représentée sur la figure III.4.

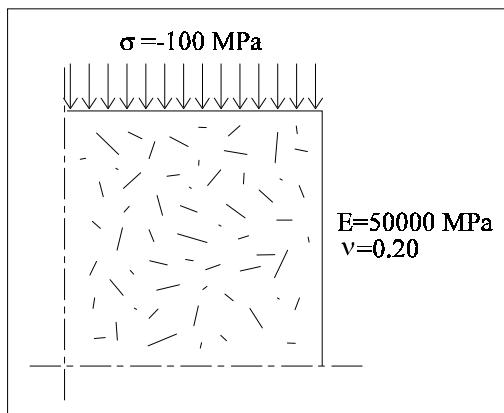


Figure III.4 : Distribution aléatoire en taille, coordonnées et orientation.

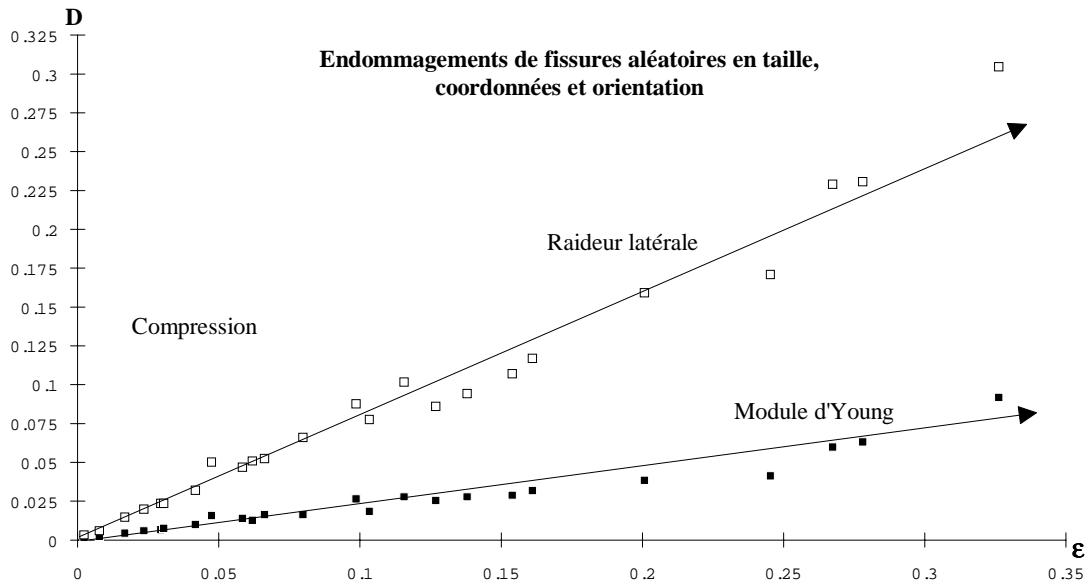


Figure III.5 : Endommagements comparés du module d'Young axial et de la raideur latérale de solides multifissurés aléatoirement (en taille, coordonnées et orientation).

Tout d'abord, nous retrouvons les mêmes résultats que lorsque la taille était corrélée.  $\epsilon$  est toujours le paramètre déterminant de l'endommagement d'un solide comportant des fissures linéaires planes. Cela ne sera plus vrai par la suite quand les fissures étudiées seront plus complexes. De plus, nous notons que l'endommagement de la raideur latérale est toujours 3 à 4 fois plus élevé que celui du module d'Young axial.

### III-2) Effet de l'orientation des micro-fissures sur l'endommagement

Nous savons déjà que la corrélation des coordonnées peut influencer l'endommagement (concentration des fissures dans une bande). Un autre paramètre déterminant dans les distributions est l'orientation des micro-fissures.

Pour l'étude de l'effet de l'orientation, nous avons choisi de travailler à densité moyenne constante ( $\epsilon = 0.08$ ) et de calculer l'endommagement du module d'Young et de la raideur latérale en faisant varier  $\theta$  par incrément de  $\frac{\pi}{20}$  (figure III.6). Les calculs sont effectués pour un coefficient de frottement  $\mu = 0.5$ . Il apparaît que les micro-fissures ne sont activées que si elles ont une orientation supérieure à  $30^\circ$ .

L'endommagement redevient nul lorsque la fissure est verticale ce qui est logique puisque dans ce cas, les contraintes appliquées ne peuvent produire de discontinuités de déplacement. L'endommagement maximal est obtenu pour un angle d'environ  $54^\circ$  ( $\frac{3\pi}{10}$ ), donc proche de  $\frac{\pi}{3}$ .

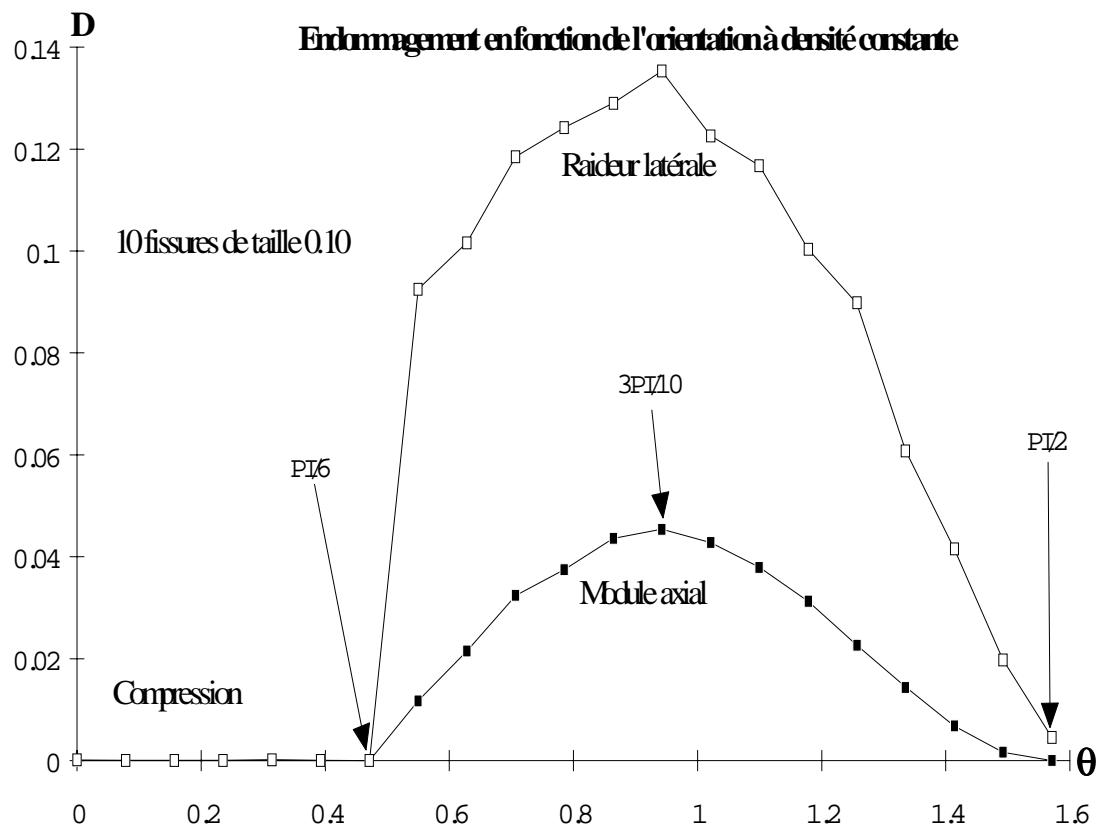


Figure III.6 : Endommagements en fonction de l'orientation des micro-fissures.

Nous avons utilisé ces résultats dans le cas de l'endommagement du module axial ainsi que dans le cas de l'endommagement de la raideur latérale. Pour cette étude, nous avons donc considéré des fissures aléatoires en coordonnées dont l'orientation est soit aléatoire, soit distribuée entre  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .

Les résultats (figures III.7 et III.8) montrent comparativement au cas d'une distribution aléatoire que les endommagements sont deux à trois fois plus élevés lorsque l'orientation est comprise entre  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{3}$ .

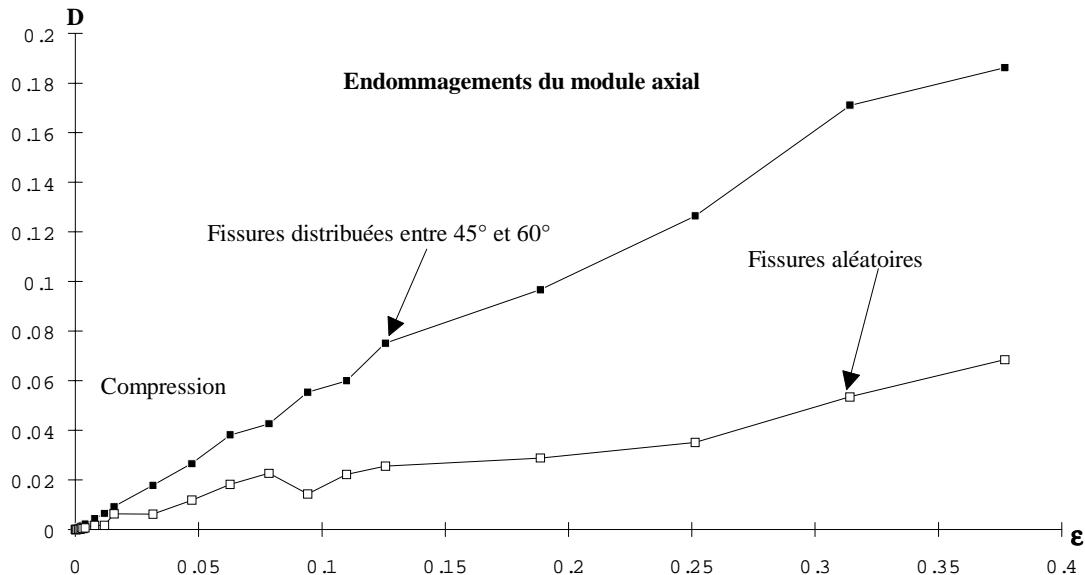


Figure III.7 : Endommagements comparés du module d'Young.

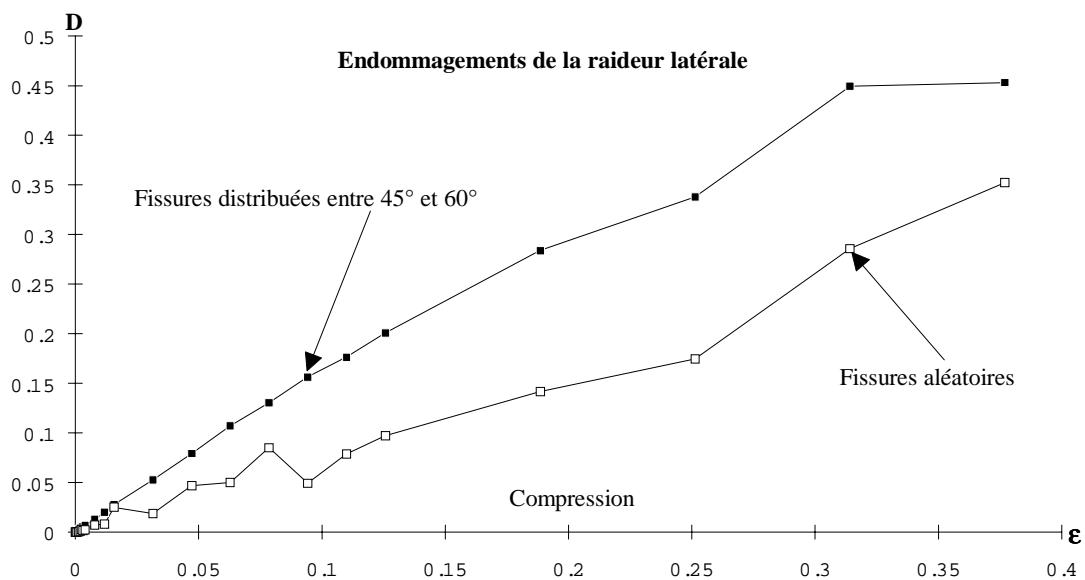


Figure III.8 : Endommagements comparés de la raideur latérale.

### III-3) Effet de l'interaction dans le cas de la fissure verticale

Nous avons présenté à la figure III.3 la variation de raideur latérale dans le cas d'une distribution aléatoire. Si les variations obtenues sont sensibles, nous pouvons observer qu'elles sont un peu faibles au vu des données expérimentales courantes.

En effet, comme nous l'avions déjà indiqué, l'importance de la dilatance dans les roches sollicitées en compression semble indiquer une orientation privilégiée des micro-fissures (tout au moins dans la phase de propagation). Le modèle le plus simple qui vient à l'esprit est celui d'une cellule élémentaire comme celle présentée sur la figure III.9 (fissure dans la direction du chargement).

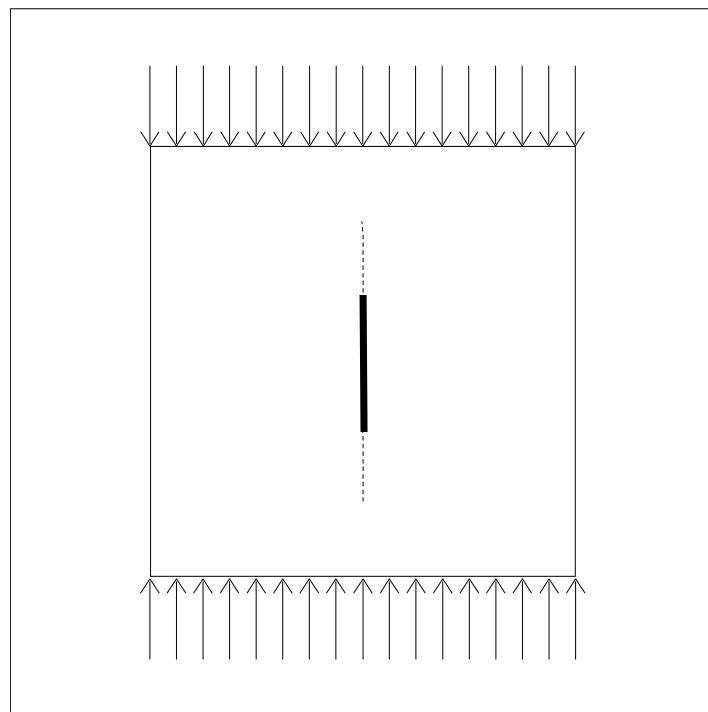


Figure III.9 : Le modèle de la cellule élémentaire.

Or nous avons constaté par le calcul numérique qu'il est impossible de propager une telle fissure. Notre objectif dans cette section est d'analyser dans quelle mesure l'interaction entre micro-fissures verticales peut modifier la raideur latérale et surtout les mécanismes de propagation des discontinuités.

### **II-3-1) Variation de la raideur latérale**

Le cas d'étude présenté est celui de plusieurs (4x4 par exemple) fissures corrélées verticales suffisamment rapprochées les une des autres (figure III.13c).

Cette interaction n'agit pratiquement pas sur le module d'Young axial, mais sur la raideur latérale. Ainsi, quand les fissures se rapprochent ( $\epsilon$  augmente) verticalement les unes des autres, l'endommagement latéral croît considérablement comme on peut le constater sur le graphique III.10.

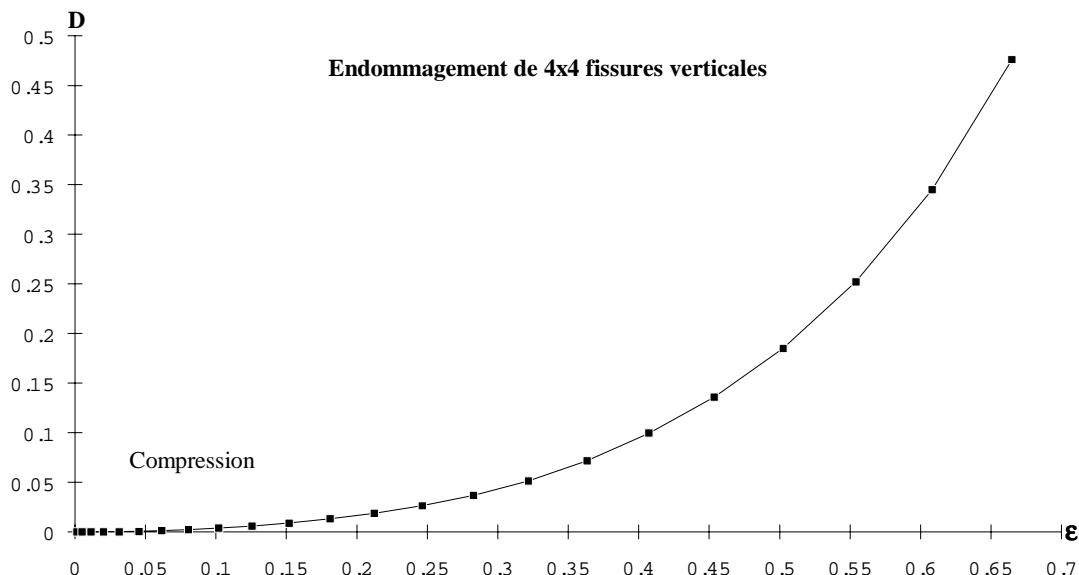


Figure III.10 : Endommagement latéral de 16 fissures verticales corrélées.

### III-3-2) Etude numérique de la propagation de fissures

Nous nous proposons d'aborder ici la question de l'évolution des micro-fissures. En effet, le phénomène de micro-fissuration ne résulte pas seulement de la création de fissures, mais aussi de la propagation de celles qui sont déjà créées.

La propagation de fissures est couramment étudiée à l'aide des facteurs d'intensité de contraintes qui représentent les singularités en tête des discontinuités. Cette approche qui peut être qualifiée de locale, exige une très grande précision du calcul de l'état de contrainte au voisinage de la fissure. Nous avons plutôt retenu l'approche énergétique, globale, fondée sur l'évaluation de l'énergie potentielle de toute la structure. A l'aide de formulations analytiques, l'énergie de propagation  $G$  peut être reliée aux facteurs d'intensité de contraintes  $K_i$ .

Pour étudier numériquement la propagation de micro-fissures, nous utilisons la relation qui définit  $G$  en fonction de l'énergie potentielle  $V$ .

En effet,  $G = -\frac{\partial V}{\partial a}$  peut être approximée par  $G = \frac{V(a - \delta_a) - V(a + \delta_a)}{2N\delta_a} + o(\delta_a^2)$ ,

si l'on fait l'hypothèse suivante : la fonction  $G$  admet un développement de Taylor à l'ordre 3, la dérivée est approchée par la pente de la corde de deux points symétriques par rapport à celui où l'on désire la dérivée de l'énergie potentielle.  $G$  étant calculé pour une fissure, il faut diviser l'expression par les  $N$  fissures ;  $a$  est la demi-longueur de la fissure.

Il faut maintenant évaluer l'énergie potentielle  $V$ . Nous pouvons montrer (Bui, 1978) que  $V = \frac{1}{2} \int_S \bar{T} \bar{u} dS$ . Cette expression est évaluée de deux façons, selon

qu'il s'agisse du contour ou des fissures :  $V = a_i(\sigma_{n_i} u_{n_i}^+ + \sigma_{s_i} u_{s_i}^+) + a_i(\sigma_{n_i} D_{n_i} + \sigma_{s_i} D_{s_i})$

Avant d'effectuer les calculs de propagation, il convient de valider la méthode que nous venons d'adopter. Nous avons testé deux cas simples dont les résultats analytiques sont connus (voir la figure III.11).

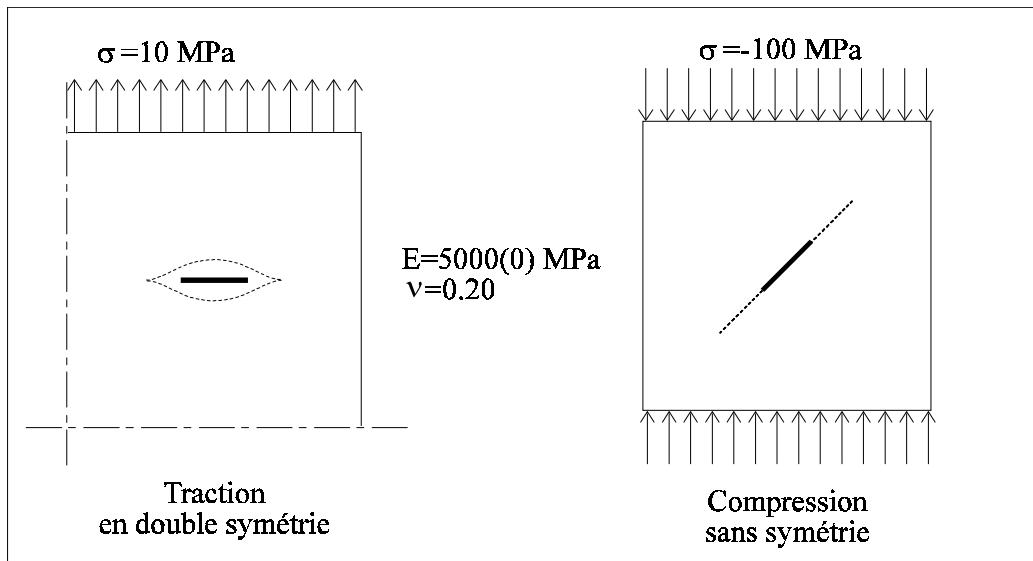


Figure III.11 : Les deux tests de validation en propagation.

Ce premier test (traction) a comme référence la solution analytique suivante en déformation plane :  $G = 4 \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma^2 \pi a$ . En théorie, pour  $2a = 0.01$ ,  $G = 12064$  J/m<sup>2</sup>, numériquement nous obtenons  $G = 12236$  J/m<sup>2</sup> ; ce qui satisfait ce test de validation en traction (voir le programme de propagation en annexes page 68).

En ce qui concerne le test de validation de la compression, nous avons  $G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}^2$  en mode II, or  $K_{II} = \sqrt{\pi a} (\sigma_s - \mu \sigma_n)$ .

Sur une fissure diagonale comme sur la figure III.4, les contraintes normales et tangentielles sont égales à -50 MPa si la contrainte de compression est de -100 MPa. Donc, en théorie,  $G = 0.0377.a$  ; ainsi pour  $2a = 0.01$ ,  $G_{théorique} = 188.5 \text{ J/m}^2$ , le code de calcul donne  $G = 195.4 \text{ J/m}^2$ . Cette différence peut tout d'abord être expliquée avec le fait que le programme fournit comme conditions aux limites -53.4 MPa au lieu de -50 MPa.

Néanmoins, comme nous pouvons le constater sur la figure III.12, les résultats fournis par notre méthode sont considérés comme validés. Cette confrontation graphique permet d'apprécier la précision des calculs numériques (une figure semblable aurait montré des résultats aussi précis dans le cas de la traction).

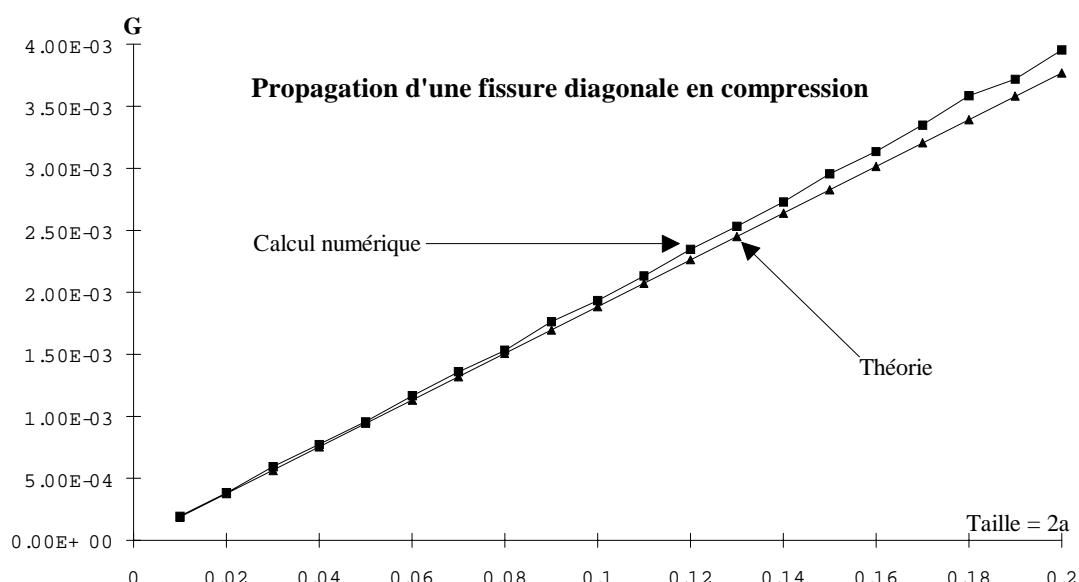


Figure III.12 : Validation de la propagation d'une fissure diagonale en compression.

### III-3-3) Variation de l'énergie G

Trois configurations géométriques différentes ont été étudiées :

- 8 fissures corrélées en bande au milieu (figure III.13a),
- 8 fissures corrélées en bande sur le bord (figure III.13b),
- 16 fissures corrélées dans tout le milieu (figure III.13c).

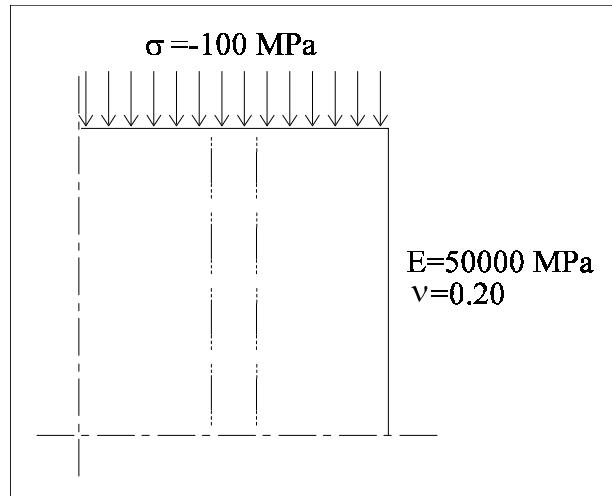


Figure III.13a : 8 fissures linéaires corrélées au milieu du solide.

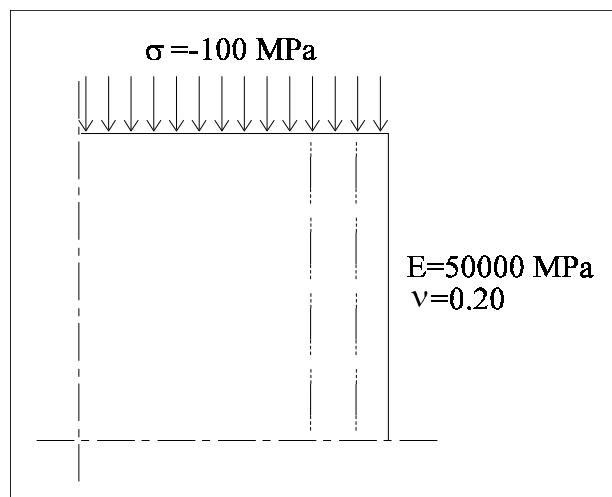


Figure III.13b : 8 fissures linéaires corrélées au bord du solide.

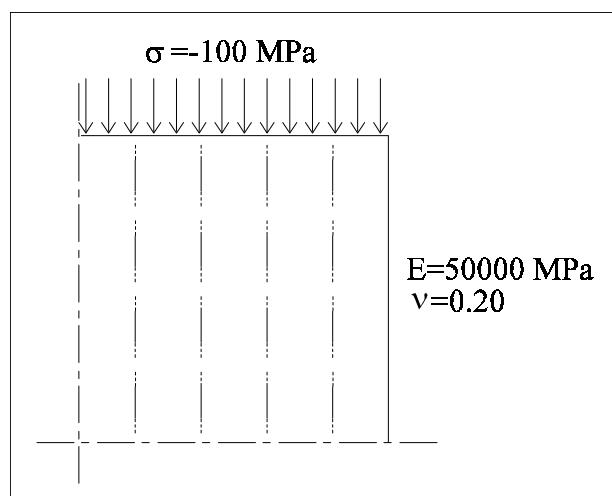


Figure III.13c : 16 fissures linéaires corrélées.

Les fissures sont supposées en propagation rectiligne. Les résultats sont présentés respectivement sur les figures III.14a, III.14b et III.14c. Sur ces trois figures, la propagation des fissures est instable dès le début (densité de fissuration faible).

La figure III.14a montre une instabilité pour de faibles densités de fissuration. La phase de stabilité à partir de la taille 0.13 peut résulter de perturbations numériques (interaction élevée). La figure III.14b peut s'interpréter comme l'apparition d'une instabilité résultant de l'interaction entre les micro-fissures et le contour. Cette instabilité n'apparaît qu'à partir d'une taille critique de 0.11. Notons que sur cette distribution, le choix de la discréétisation du contour vertical conditionne entièrement l'allure de la courbe.

En ce qui concerne les résultats de la figure III.14c, la propagation est instable pour de faibles densités. La stabilité observée à la fin peut provenir d'imprécisions numériques due à une trop forte interaction.

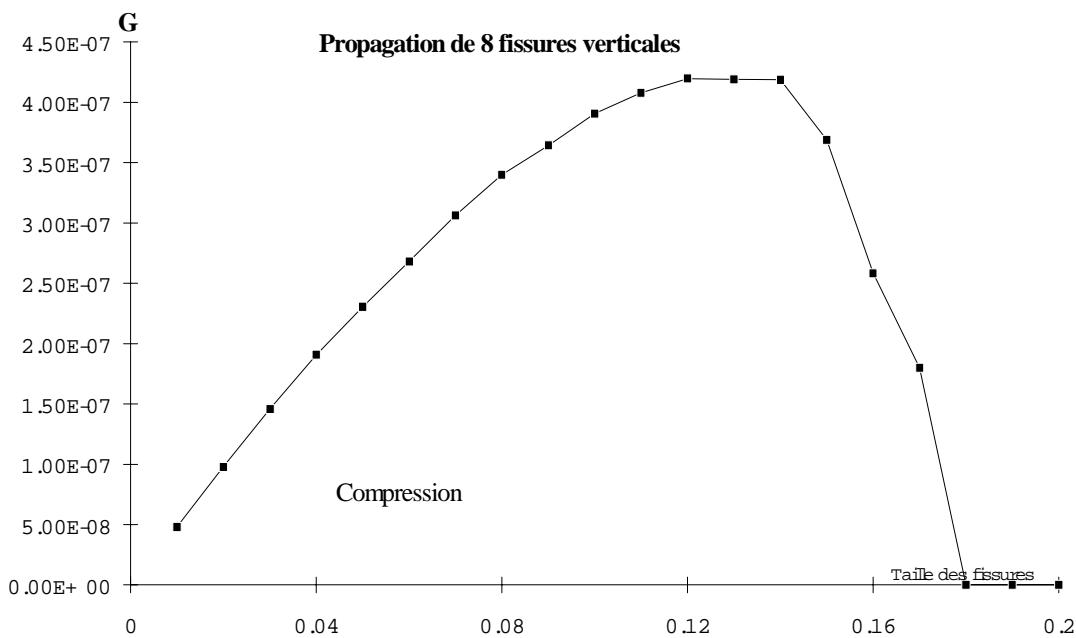


Figure III.14a : Propagation de 8 fissures verticales corrélées au milieu du matériau.

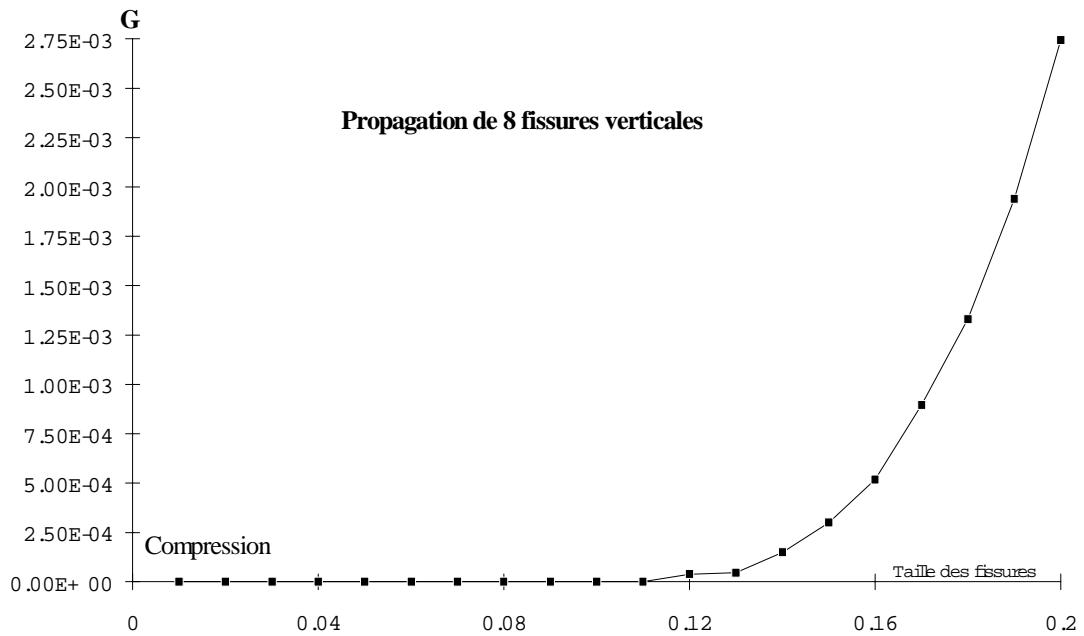


Figure III.14b : Propagation de 8 fissures verticales corrélées le long d'une face verticale du matériau.

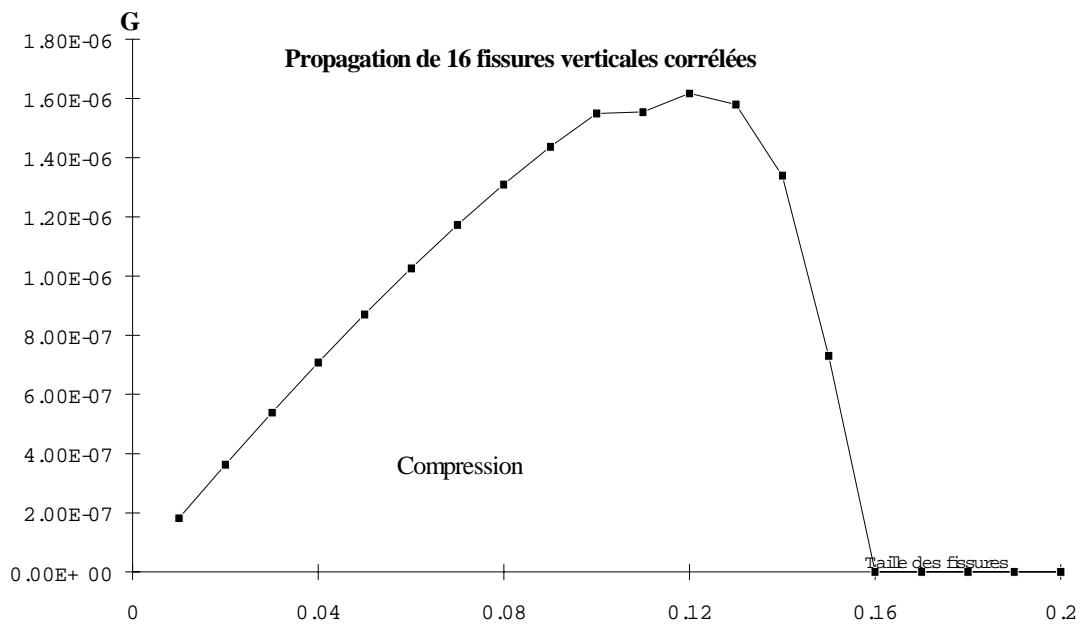


Figure III.14c : Propagation de 4x4 fissures verticales corrélées.

### III-4) Modèle de fissure mixte

De nombreux travaux publiés (Steif 1984, Kemeny et Cook 1987, Nemat-Nasser et Horii 1982) ont montré que la fissure ne se propageait pas dans son plan, mais plutôt quasi-verticalement à chaque extrémité de la fissure inclinée (figure III.15). C'est pourquoi, nous nous sommes intéressés à la propagation des fissures mixtes.

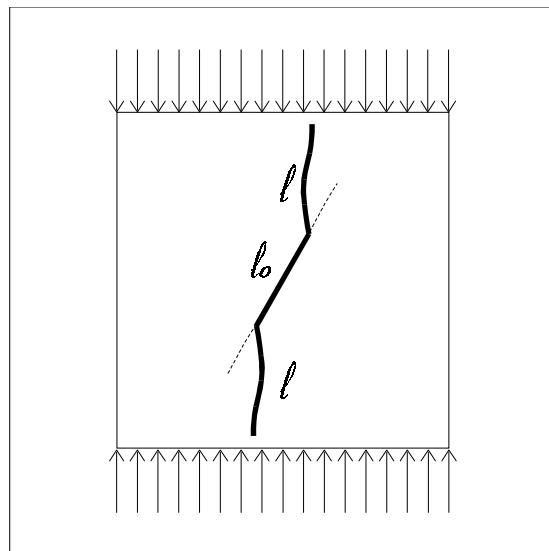


Figure III.15 : Propagation de la fissure mixte.

Dans les calculs présentés ici, la partie inclinée des micro-fissures est fixe tandis que la propagation se fait aux extrémités (variation de  $l$ ). Nous avons d'abord étudier l'endommagement du module d'Young et de la raideur transversale sur différentes configurations de fissures mixtes (figure III.16). Notons que la notion de densité de fissuration est maintenant moins claire. En effet, lorsque les fissures comportent 3 éléments, deux solutions pour calculer  $\varepsilon$  peuvent être envisagées.

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{\pi \sum_{i=1}^3 a_i^2}{S}, \text{ soit } \varepsilon = \frac{\pi A^2}{S}, \text{ } A \text{ étant la demi-longueur de la fissure équivalente joignant les deux extrémités de la fissure mixte.}$$

La deuxième solution paraît être la plus logique étant donné que les trois éléments forment une seule fissure. Cependant, cette façon de procéder montre ses limites notamment en propagation de fissures, lorsque les extrémités sont très longues par rapport à la partie centrale.

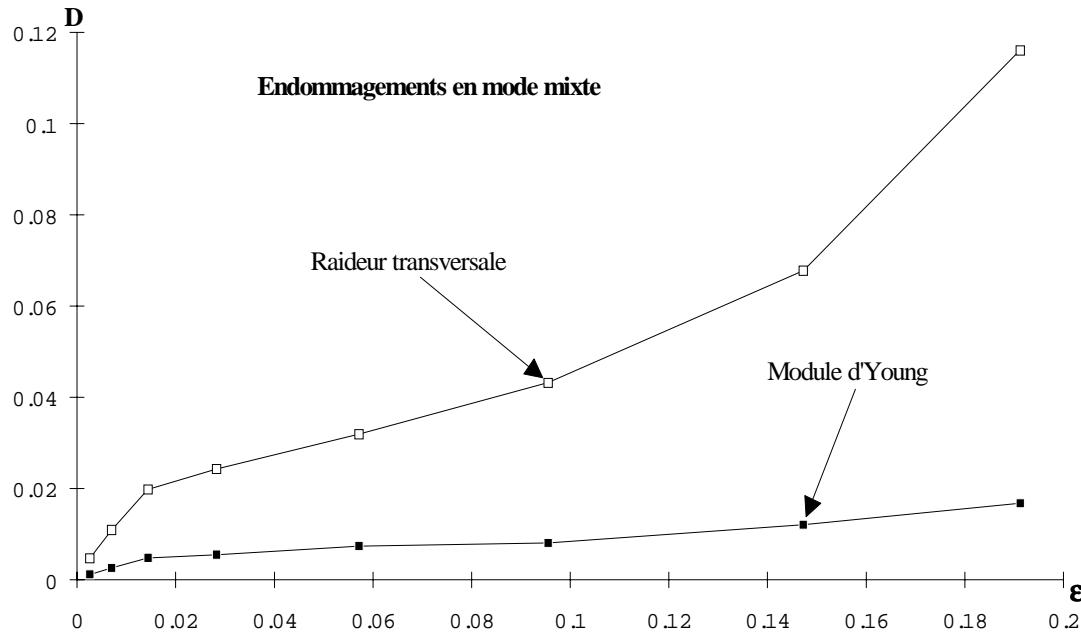


Figure III.16 : Endommagements de E et de K en mode mixte.

### III-5) Etude du processus de rupture

Nous nous sommes ensuite attachés à valider la propagation d'une fissure mixte en simplifiant la propagation des extrémités de la fissure : la fissure mixte est considérée comme 3 éléments linéaires associés dont les 2 extrémités verticales peuvent croître.

La validation a porté sur une fissure mixte isolée dans le milieu considéré sans symétrie. Deux problèmes ont retenu notre attention : la discrétisation du contour ainsi que des fissures et le choix de la longueur fixe de la partie centrale. En effet, la discrétisation du milieu est d'une importance cruciale. Tous les calculs précédents s'accompagnaient de la discrétisation minimale sur les fissures.

Maintenant, l'énergie G est calculée comme la dérivée de l'énergie potentielle de fissuration (V) par rapport à la taille des fissures. Cependant, cette énergie potentielle varie très peu : cette variation *joue* à partir de la 5<sup>ème</sup> décimale. Cela implique que V soit calculé très précisément. Plusieurs essais ont été nécessaires pour montrer que si chacun des 3 éléments était divisé en 20 sous-éléments, les résultats *tangentaient* l'asymptote générée par cette discrétisation variable.

De plus, trois longueurs de partie centrale ( $l_o$ ) ont été étudiées : 0.02, 0.10 et 0.20 unité, le côté du carré représentant le milieu mesurant 2.00 unités. Les résultats des graphiques III.17, III.18 et III.19 montrent l'influence du choix de  $l_o$  pour l'obtention de résultats corrects. En effet, dans les cas des figure III.18 et III.19 la fissure se propage tout d'abord de façon stable (pente négative), puis passe en propagation instable (pente positive) lorsque les extrémités atteignent la moitié de la distance qui les sépare du contour. Ceci n'est pas le cas de la figure III.17 où il apparaît clairement que la partie inclinée joue un rôle moteur dans le processus de propagation.

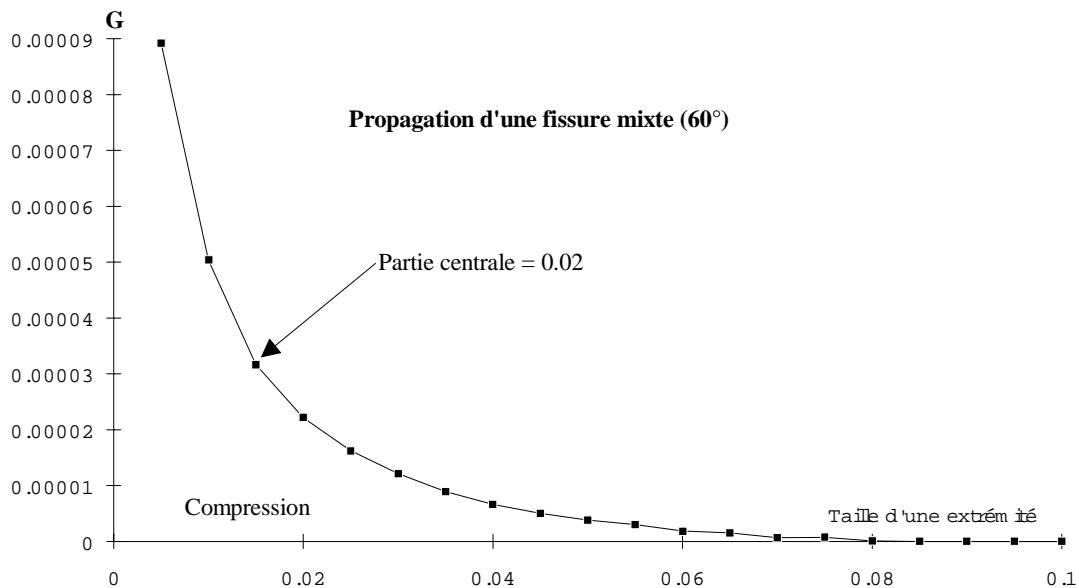


Figure III.17 : Propagation d'une fissure mixte inclinée à  $60^\circ$  avec  $l_o = 0.02$  unité.

L'énergie G s'annule lorsque la taille d'une extrémité dépasse 0.08 unité. Cette énergie ne redeviendra jamais positive.

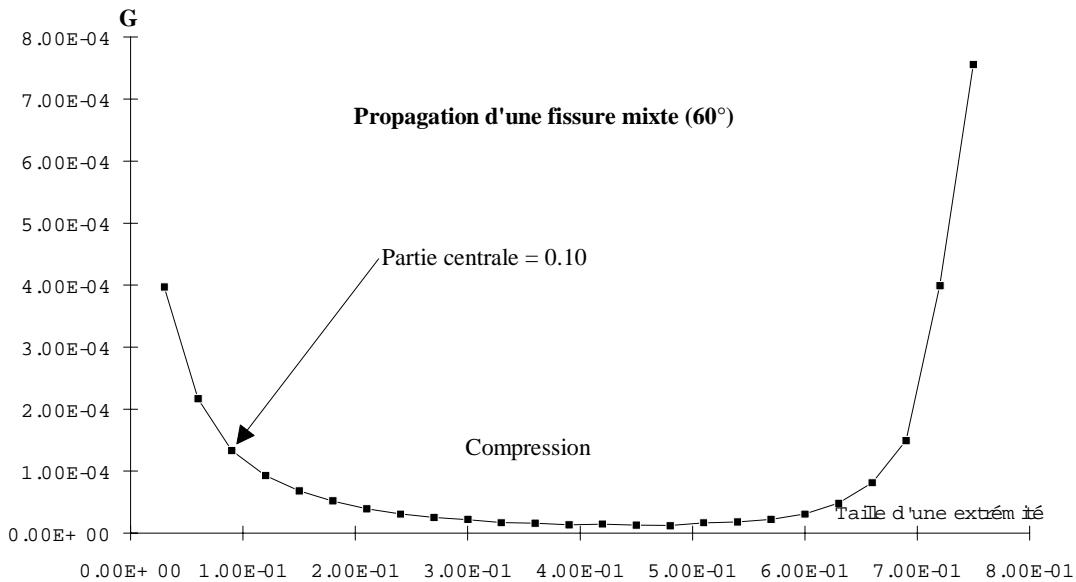


Figure III.18 : Propagation d'une fissure mixte inclinée à  $60^\circ$  avec  $l_0 = 0.10$  unité.

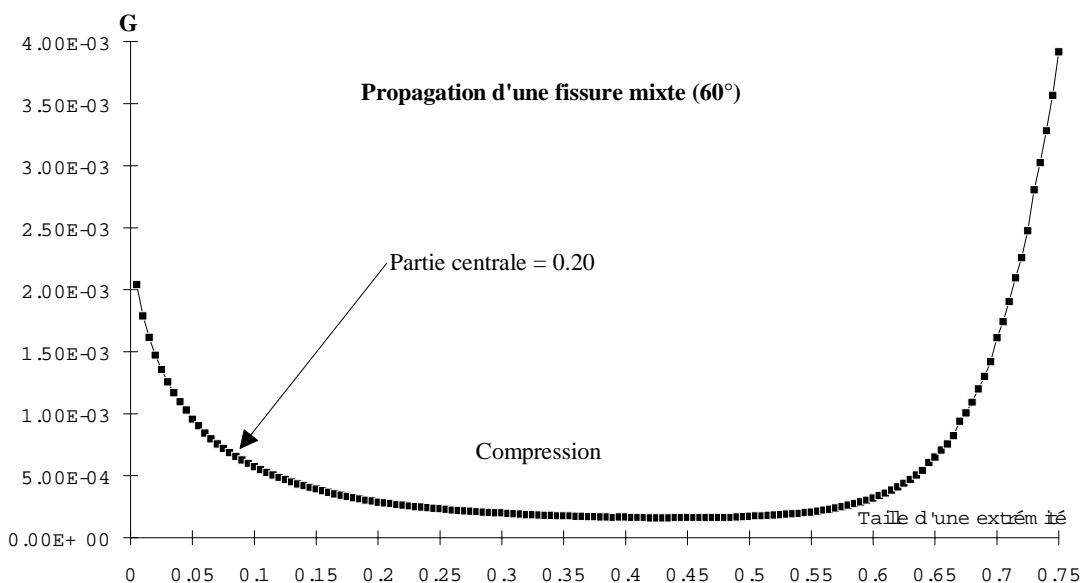


Figure III.19 : Propagation d'une fissure mixte inclinée à  $60^\circ$  avec  $l_0 = 0.20$  unité.

Sur les trois précédents graphiques, nous pouvons aussi remarquer une grande variation de l'ordre de grandeur de  $G$  en fonction de  $l_0$ . Cette variation n'est d'ailleurs pas linéaire.

Nous nous proposons d'étudier maintenant 10 fissures aléatoires en propagation rectiligne (figure III.20). La propagation est instable dès le début et le restera jusqu'à la fin (densités de fissures élevées). Nous retrouvons là la même allure de courbe que dans le cas de la fissure unique qui se propage dans son plan.

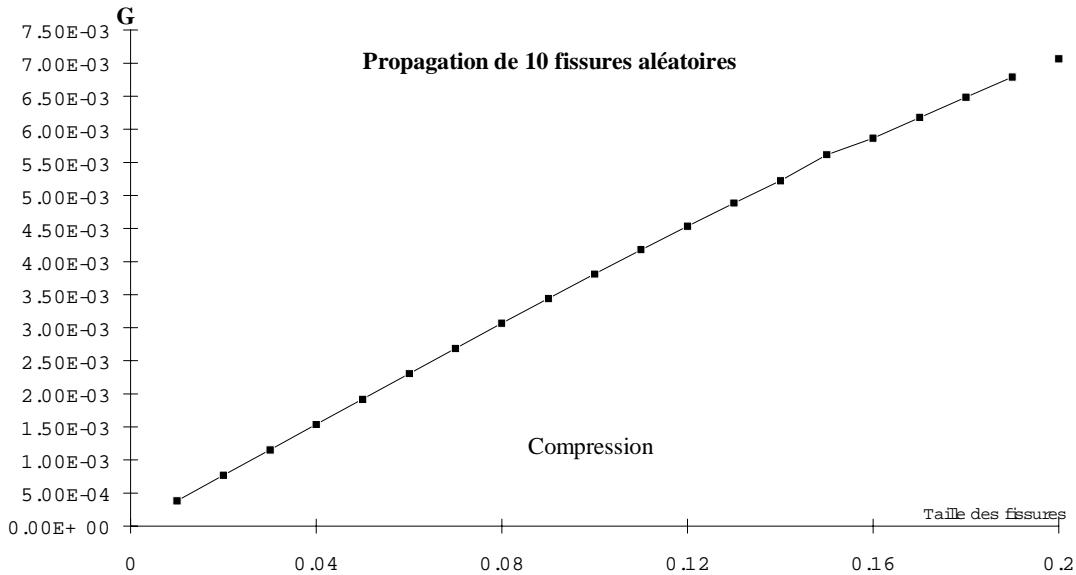


Figure III.20 : Energie G due à la propagation de 10 fissures aléatoires.

La dernière partie de cette étude est consacrée à l'étude de la propagation dans le cas d'une distribution corrélée de 5x5 fissures mixtes orientées à environ  $60^\circ$  (figure III.21). Afin de ne pas avoir d'interaction au début de la propagation et de pouvoir espacer suffisamment les fissures entre elles,  $l_0$  a été fixé à 0.02 (en double symétrie). Théoriquement, à faible densité, le comportement des 25 fissures doit être le même que celui d'une seule. C'est ce que montre le graphique III.22.

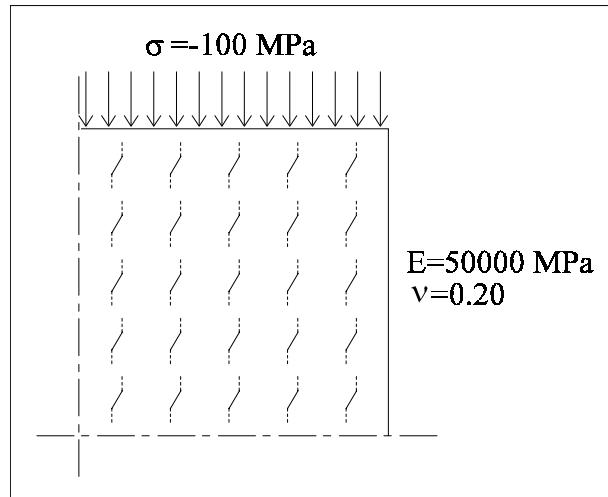


Figure III.21 : 25 fissures mixtes corrélées.

Nous remarquons également que l'énergie G (voir le graphique III.22) décroît, s'annule puis croît (propagation instable). Normalement, après s'être annulée, l'énergie ne peut que rester nulle puisque alors, il faudrait une contrainte

infinie pour permettre la continuation de la propagation. Ces 25 fissures mixtes sont discrétisées au minimum (3 éléments), ce qui peut être insuffisant.

Il semble plutôt que les valeurs nulles de  $G$  proviennent de la précision des calculs numériques effectués. Nous avons ici atteint les limites de l'étude de la micro-fissuration sur un P.C. Compte tenu de la limitation mémoire (640 Ko) qu'impose le D.O.S. dans sa version 6.0, nous ne pouvons discrétiser que 132 éléments : matrice 264x264 en double précision. Or, le contour nécessite 2x30 éléments pour une bonne précision ; il ne reste plus que 72 éléments pour les fissures. Comme 3x20 éléments sont nécessaires pour discrétiser finement une fissure mixte, il y a nécessité d'implanter les codes de calcul en Fortran sur un mini-ordinateur doté d'une grande puissance de calcul. A titre d'indication, le calcul de 20 énergies  $G$  (une courbe) dure 25 minutes sur le plus rapide des P.C.

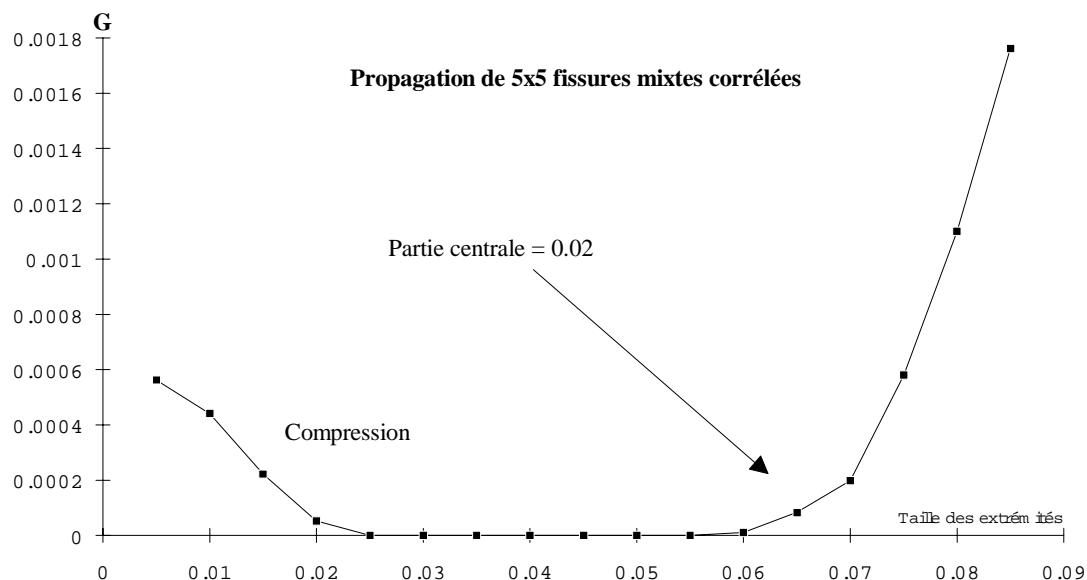


Figure III.22 : Propagation de 5x5 fissures mixtes corrélées.

## CONCLUSION

Le but de ce projet est l'étude de l'influence de la micro-fissuration sur le module d'Young effectif. Tout d'abord, une étude bibliographique succincte nous a permis de recenser les méthodes théoriques existant dans ce domaine. Nous avons constaté une grande diversité des résultats.

Il nous est apparu important de développer un code de calcul permettant de générer des distributions (aléatoires ou non) de fissures. Nous avons choisi la méthode des discontinuités de déplacements, celle-ci paraît bien adaptée au milieu micro-fissuré.

Les applications effectuées ont montré que :

- en traction : les résultats de la distribution aléatoire sont en accord avec ceux Budiansky et O' Connell (Budiansky et O' Connell, 1976) en ce qui concerne l'évaluation de  $E$ . Par contre, la variation du coefficient de Poisson que nous obtenons est en désaccord avec les travaux de Wang et Ehrlacher (Wang et Ehrlacher, 1992) et de Sumarac et Krajcinovic (Sumarac et Krajcinovic, 1987).

Les fissures corrélées provoquent un endommagement double des fissures aléatoires à faible densité de fissuration conformément aux relations établies par Laws et Brockenbrough (Laws et Brockenbrough, 1987).

Lorsque les micro-fissures sont distribuées dans une bande horizontale, l'endommagement est deux fois plus élevé que dans le cas précédent. De plus, lorsque les fissures (dans la bande) sont orientées perpendiculairement à la sollicitation de traction, l'endommagement est plus élevé.

- en compression :  $D_{\text{axial}}$  est entre 9 à 16 fois plus faible qu'en traction. D'autre part, l'anisotropie de l'endommagement est mise en évidence avec l'évaluation de la raideur effective latérale  $K$ . L'interaction des fissures verticales provoque un endommagement de la raideur latérale ainsi que la propagation de ces défauts.

L'étude des fissures en mode mixte a montré le rôle décisif que joue la taille de la partie inclinée des micro-fissures dans la stabilité de leur propagation. L'étude des interactions des fissures en mode mixte doit être poursuivie et complétée par

l'adjonction effective du critère de propagation d'énergie ( $G = G_c$ ). Enfin, il serait bon de prévoir un couplage du générateur avec le programme numérique en milieux anisotropes dont dispose le laboratoire. Une autre option pourrait s'avérer tout aussi utile : il s'agit de l'étude de la micro-fissuration en vue d'établir des courbes contraintes-déformations du milieu endommagé.

## BIBLIOGRAPHIE

- J. Aboudi & Y. Benveniste** (1987) : The effective moduli of cracked bodies in plane deformations. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 26, n° 2, pp. 171-184.
- Z. T. Bienawski** (1967) : Mechanism of brittle fracture of rock. Part I Theory of the fracture progress - Part II Experimental study - Part III : Fracture in tension and under long term loading. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol. 4, pp. 395-430.
- Benaija & Boulay** et al. (1990) : Etude de la localisation dans un grès des Vosges. *Rapport scientifique Gréco Géomatériaux*, pp. 181-184.
- W. M. Bruner** (1976) : Comment on "Seismic velocities in dry and saturated cracked solids" by R.J. O' Connell and B. Budiansky. *J. Geophys. Res.*, vol. 81, pp. 2573-2576.
- B. Budiansky & R. O' Connell** (1976) : Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, vol. 12, pp. 81-97.
- H.D. Bui** (1978) : Mécanique de la rupture fragile. *Edition Masson*.
- S. L. Crouch & A. M. Starfield** (1983) : Boundary element methods in solid mechanics. *Ed. George Allen & Unwin (Publishers) Ltd.*
- F. S. Henyey & N. Pomphrey** (1982) : Self-consistent moduli of a cracked solid. *Geophys. Res. Lett.*, vol. 9, pp. 903-906.
- A. Hoenig** (1979) : Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *Int. J. Solids Structures*, vol. 15, pp. 137-154.
- H. Horii & S. Nemat-Nasser** (1983) : Overall moduli of solids with microcracks load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 31, n° 2, pp. 155-171.
- M. Kachanov** (1982a) : A microcrack model of rock inelasticity. Part I : Frictional sliding on microcracks. *Mech. Mater.* vol. 1, pp. 19-27.

**M. Kachanov** (1982b) : A microcrack model of rock inelasticity. Part II : Propagation of microcracks. *Mech. Mater.* vol. 1, pp. 29-41.

**J.M. Kemeny & N.G.W. Cook** (1987) : Crack models for the failure of rocks in compression. In : *constitutive laws for engineering materials* vol. 2, pp. 879-887.

**N. Laws & J. R. Brockenbrough** (1987) : The effect of micro-crack systems on the loss of stiffness of brittle solids. *Int. J. Solids Structures* vol. 23, n° 9, pp. 1247-1268.

**J. Lemaître & J.L. Chaboche** (1978) : Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J. de Mec. Appliquée*, vol. 2, p. 317.

**S. Nemat-Nasser & H. Horii** (1982) : Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst. *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 6805-6821.

**C. M. Sayers & M. Kachanov** (1991) : A simple technique for finding effective elastic constants of cracked solids for arbitrary crack orientation statistics. *Int. J. Solids Structures*, vol. 27, n° 5, pp. 671-680.

**P.S. Steif** (1984) : Crack extension under compressive loading. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 20, pp. 463-473.

**D. Sumarac & D. Krajcinovic** (1987) : A self-consistent model for microcrack-weakened solids. *Mechanics of Materials*, vol. 6, pp. 39-52.

**T.C. Wang & A. Ehrlacher** (1992) : Micromechanics of elastic solids weakened by a large number of cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 43, n° 5, pp. 707-724.

**W. R. Wawersik & W. F. Brace** (1971) : Post failure behaviour of a granite and diabase. *Rock Mech.*, vol. 3, pp. 61-85.

**T. F. Wong** (1982) : Micromechanics of faulting in westerly granite. *Int. J. Rock mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, vol. 19, pp. 49-64.

**R.W. Zimmerman** (1991) : Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions. *Mechanics of Materials*, vol. 12, pp. 17-24.