

## **Approche par changement d'échelle de l'endommagement par mésolfissuration : application au comportement des matériaux quasi fragiles.**

**D. Kondo, V. Pensée, V. Renaud,**  
Laboratoire de Mécanique de Lille (URA CNRS 1441)  
Université Lille I - 59655 Villeneuve d'Ascq

**Résumé :** On présente une modélisation micro- macro 3-D de l'endommagement par mésolfissuration, développée pour l'étude du comportement des matériaux quasi fragiles. Cette modélisation incorpore les mécanismes de croissance progressive de mésolfissures en mode mixte, identifiés dans de nombreuses expériences comme source principale (à l'échelle mésoscopique) de la déformation anélastique de ces matériaux. Le couplage entre mésolfissuration et phénomènes de frottement permet de rendre compte des aspects fondamentaux du comportement quasi fragile : anisotropie induite, dilatance, déformations résiduelles, comportement hystérétique etc... Après avoir brièvement rappelé la cinétique de type fragile, nous présentons les éléments de base du changement d'échelle dans les milieux élastiques fragiles fissurés, en précisant autant que possible les difficultés inhérentes à celui-ci. Quelques éléments de la modélisation micromécanique développée ainsi que des résultats de simulation sont discutés.

### **1-. Introduction**

Le comportement mécanique de nombreux matériaux quasi-fragiles tels certaines roches, les bétons ou les matériaux céramiques est pour une large part déterminé par la création et la croissance de mésolfissures (endommagement fragile). La modélisation par variables internes de cet endommagement a fait récemment l'objet de nombreuses études approfondies (cf. p. ex. Krajcinovic, 1997; Chaboche, 1993 ; Halm et Dragon, 1996; Welemane et Cormery, 1999). Ces études, qui intègrent dans leur formulation l'anisotropie induite par l'endommagement, les effets de refermeture de mésolfissures et/ou de frottement, on atteint aujourd'hui un stade de développement qui ouvre d'importantes perspectives d'applications. Bien que de formulation macroscopique, certaines de ces modélisations (que l'on qualifie parfois d'"intermédiaires") s'appuient sur des considérations issues de la micromécanique des milieux élastiques fragiles contenant des fissures. Les succès récents de cette démarche incite à ce qu'elle soit éclairée et soutenue sur plusieurs points par des investigations 'ciblées' relevant du changement d'échelle. Citons entre autres, le caractère hétérogène des milieux étudiés, la construction des propriétés effectives (compliances élastiques, potentiels d'énergie) et des lois d'évolution macroscopiques etc..

Sur ces divers fronts, la micromécanique des milieux élastiques multifissurés a progressé de façon significative depuis quelques années, en particulier pour ce qui concerne l'évaluation des propriétés effectives (compliances élastiques, énergie macroscopique) et le rôle des interactions entre mésolfissures (cf. synthèse de Kachanov, 1993 ; Nemat-Nasser et Horii, 1983 ; Berthaud et al., 1994 ; Renaud et al., 1996 etc..). D'autres développements, relevant également de la micromécanique, ont permis la mise en œuvre de modèles de mésolfissuration évolutive (Kachanov, 1982 ; Leguillon et Sanchez-Palencia., 1982 ; Andrieux, 1983 ; Andrieux et al., 1986 ; Nemat-Nasser et Obata, 1988 ; Fanella et Krajcinovic, 1988 ; Lee et Ju, 1991 ; Gambarotta et Lagomarsino, 1993 ; Lawn et Marshall, 1998 ; Batista et Gross, 1998 etc..). La plupart de ces modèles sont cependant limités soit par leur caractère bidimensionnel, soit par les trajets de chargement qu'ils permettent d'étudier, soit enfin par les mécanismes microstructuraux de déformation qu'ils prennent en compte. Il est facile de constater que la mise en place d'un véritable changement d'échelle pour aboutir à un modèle micro-macro suffisamment proche de la physique des milieux mésolfissurés et assez général (soit pour enrichir les modèles macroscopiques en développement, soit pour être directement appliqués) reste encore un sujet largement ouvert. Notre propos ici est simplement d'illustrer, à travers une modélisation que nous avons souhaitée relativement générale (mécanismes de déformations identifiés en laboratoire, formulation 3-D incrémentale), les difficultés inhérentes à l'application des méthodes de changement d'échelle aux matériaux à mésolfissuration (microstructure) évolutive.

## 2- Méthodologie de changement d'échelle et formulation du modèle

**2.1- Quelques précisions :** De nombreuses observations réalisées sur divers matériaux (roches, bétons céramiques) déformés sous sollicitations de compression indiquent que le processus de déformation fragile est largement gouverné par la croissance en mode d'extension de mésolfissures préexistantes ou amorcées par le chargement. (cf. p. ex. Kranz, 1983; Nemat -Nasser et Horii, 1993). L'origine de ces mésolfissures d'extension sous sollicitations macroscopique de compression est très variée : présence de micropores, mésolfissures préexistantes, contraste d'élasticité entre constituants etc... Parmi ces sources de fissuration, celle des mésolfissures préexistantes susceptibles de croître en mode mixte est apparue au fil des années comme l'un des plus pertinents vis à vis de la cinétique fragile.

La modélisation par changement d'échelle suit les étapes classiques de l'homogénéisation des milieux non périodiques (cf. p. ex. Zaoui, 1998) : représentation, localisation, homogénéisation.

**Représentation :** Dans le cas des milieux fragiles contenant des mésolfissures, le Volume Élémentaire Représentatif (VER) constitué de deux phases, la matrice fragile et l'ensemble des mésolfissures (supposées en grand nombre et de taille relativement faible par rapport aux dimensions du VER). On fait également l'hypothèse d'une matrice homogène dont le comportement est élastique linéaire isotrope. Les seules sources d'anisotropie et de dissipation considérées sont le frottement sur les lèvres de mésolfissures fermées ainsi que la croissance (orientée) en mode d'extension de mésolfissures. De plus, on considère des mésolfissures non interactives<sup>1</sup>.

**Localisation :** Cet ensemble d'hypothèses permet une schématisation simple du milieu mésolfissuré (cellule contenant une mésolfissure isolée, voir figure 1a), ainsi que l'utilisation de solutions élémentaires issues de la mécanique linéaire de la rupture. Le VER ainsi simplifié peut être sollicité à l'aide de conditions au contour homogènes classique (contraintes homogène  $\Sigma$  ou déformations homogène  $E$ ). Dans le cas par exemple de conditions homogènes au contour  $\Sigma$ , le champ de déformation macroscopique (macrodéformation) du MHE s'écrit (cf. p.ex. Bui et coll., 1982 ; Andrieux, 1983 ; Mura, 1987 ; Nemat-Nasser et Horii, 1993) :

$$E = E^0 + E^d = E^0 + \frac{1}{2V} \sum_k \int_S^k (\vec{b} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{b}) dS \quad (1)$$

où  $\vec{b}$  est le vecteur saut (ou discontinuités) de déplacement sur les lèvres des mésolfissures.  $E^d$  est la part de déformations induite par la présence de l'ensemble de ces mésolfissures. En l'absence de tout phénomène dissipatif (cas d'une fissure ouverte ou fermée lubrifiée), ce résultat est équivalent à la construction d'un potentiel (élastique complémentaire) effectif :

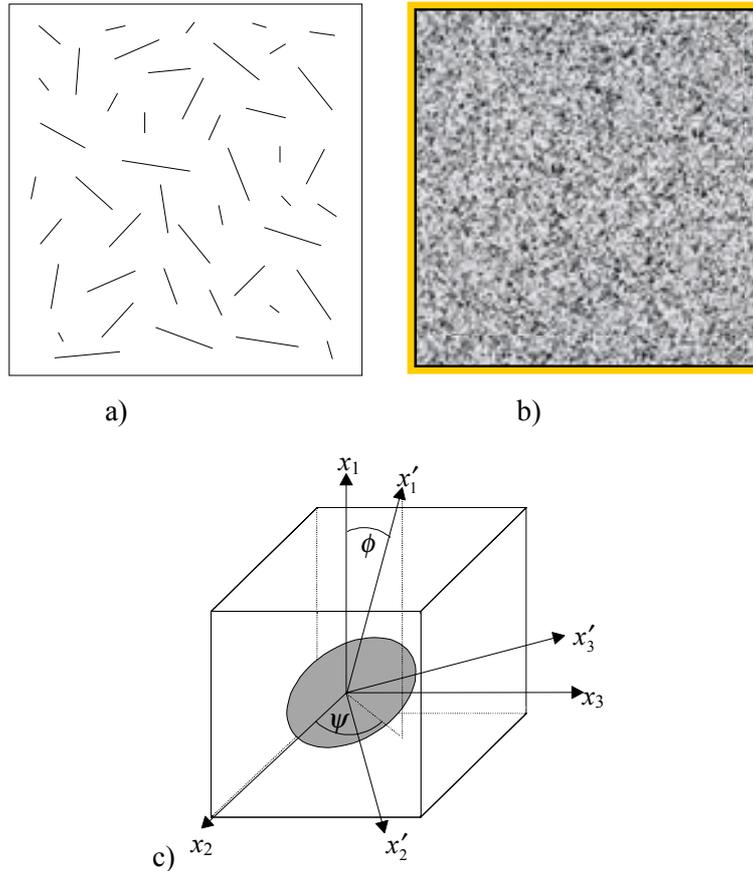
$W^*(\Sigma) = \frac{1}{2} \Sigma : S : \Sigma = \frac{1}{2} \Sigma : (S^0 + S^d) : \Sigma$ ,  $S^0$  étant la compliance élastique de la matrice.  $W^*$  se construit en utilisant les résultats de la mécanique de la rupture<sup>2</sup>.

**Homogénéisation :** Le comportement effectif du milieu homogène équivalent MHE (figure 1b) est obtenu via une procédures de moyenne sur l'ensemble des orientations des mésolfissures préexistantes de densité  $\omega$  donnée. Le paramétrage se fait par les angles  $\phi$  et  $\psi$ . L'hypothèse d'une distribution uniforme des orientations permet d'évaluer aisément cette moyenne.

Le propos qui suit se concentre volontairement au cas d'un matériau multifissuré sollicité en compression. Les mésolfissures préexistantes sont de même orientation; elles sont toutes fermées et peuvent frotter, glisser et ensuite se propager en mode mixte.

<sup>1</sup> Dans le cas d'une distribution aléatoire de mésolfissures, du fait de la mécanique particulière des interactions entre celles-ci, le domaine de validité de cette hypothèse s'avère d'assez grande portée (Kachanov, 1993, Berthaud et al., 1994 ; Renaud et al., 1996) et correspond à celui du modèle de Mori-Tanaka souvent utilisé dans les composites à morphologie matrice-inclusion.

<sup>2</sup> C'est l'approche suivie par Kachanov et ses collaborateurs (Kachanov, 1993).



Figures 1 : a) VER 2-D b) Milieu homogène équivalent c) Mésolfissure 3-D isolée dans la matrice

## 2.2- Potentiels effectifs :

**Construction du potentiel effectif en présence de frottement** : Dans le cas de la seule dissipation par frottement, en suivant une démarche similaire à celle d'Andrieux en 2-D (cf. également Kachanov, 1982; Gambarotta et Lagomarsino, 1993), on peut évaluer le potentiel effectif par résolution du problème élémentaire 3-D : 
$$W^*(\Sigma, \alpha) = \frac{1}{2} \Sigma : S^0 : \Sigma + \alpha \Sigma_{nt} - \frac{1}{2} K_0 \alpha^2 \quad (2)$$

$K_0$  est un coefficient dépendant des propriétés élastiques de la matrice et de la taille initiale des mésolfissures. Comme dans le modèle d'Andrieux,  $\alpha$  est une variable de glissement moyen sur les lèvres des mésolfissures de la famille considérée. Les lois d'état se déduisent immédiatement de (2).

**Hypothèse** : On suppose l'évolution du glissement régie par une loi de frottement du type coulomb.

Sous cette hypothèse l'évolution de  $\alpha$  est déterminée par la condition de consistance. Le comportement du milieu mésolfissuré est alors du type 'plasticité' avec écrouissage, le frottement n'introduisant que des déformations permanentes lors d'un déchargement complet. De plus, du fait des possibilités de glissement inverse, la déformation peut s'accompagner d'une réponse hystérétique.

### Potentiel effectif en présence d'endommagement (croissance en mode mixte) :

**Hypothèse** : On suppose que, sous sollicitation de compression, le mode d'endommagement prédominant est la croissance en mode mixte des mésolfissures

Cette hypothèse exclut de fait les mécanismes de génération (nucléation) de nouvelles mésolfissures lors du chargement<sup>†</sup>.

<sup>†</sup> . Bien que non négligeable dans certain cas, la prise en compte de la nucléation se prête encore mal à un traitement micromécanique satisfaisant. Cette situation est similaire à celle que de l'endommagement ductile par évolution de porosité. Pour l'endommagement fragile, une théorie du type Francfort - Marigo (1996) pourrait être une solution intéressante.

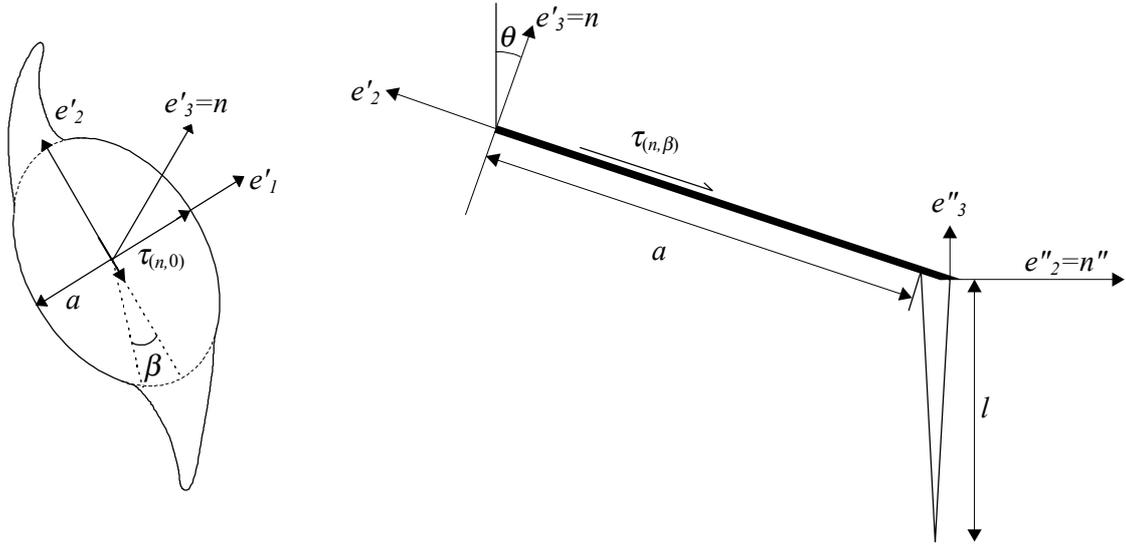


Figure 2 : a) Problème de fissuration 3-D – b) Approximation par coupes 2-D paramétrées par l'angle  $\beta$

L'analyse théorique de la fissuration 3-D en mode mixte reste encore un sujet très débattu, les tentatives récentes de certains auteurs (cf. p.ex. travaux de Leblond et coll., 1996) débouchant néanmoins sur des formulations qui restent à exploiter dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Dans l'état actuel des connaissances, la modélisation micromécanique tridimensionnelle de l'endommagement fragile ne peut raisonnablement être abordé que dans le contexte de solutions approchées du problème général de fissuration tridimensionnelle. La "porte de sortie" empruntée consiste à considérer une série de problèmes 2-D obtenus grâce à des coupes planes de la fissure 3-D ; ces coupes sont paramétrées par un angle  $\beta$  (voir figures 2). Ceci permet notamment de se ramener à une pseudo - analyse 2-D des branches (figure 2b), situation pour laquelle on dispose de solutions analytiques approchées (Cotterell & Rice, 1980 ; Nemat-Nasser et Hori, 1986).

Les simplifications que nous venons d'indiquer permettent de ramener l'étude de l'endommagement induit à celle de la mésofissure branchée représentée à l'aide des 3 variables évolutives que sont (voir figure 2b) :

- le glissement moyen  $\alpha$  de la partie centrale de la mésofissure,
- la longueur  $l$  de chacune des 2 branches,
- l'orientation  $\theta$  des branches par rapport à la normale à la partie centrale de la mésofissure.

L'approche par changement d'échelle de l'endommagement par mésofissuration, telle qu'elle vient d'être esquissée, nécessite en priorité la description de la croissance progressive des mésofissures en mode mixte. L'analyse théorique du problème pseudo 2-D en présence de frottement sur la partie centrale inclinée de la mésofissure permet de montrer que c'est le cisaillement résultant sur la partie centrale qui contrôle le développement en mode d'extension des branches (cf. p.ex. Nemat-Nasser et Horii, 1986). C'est ce mécanisme qui introduit à l'échelle mésoscopique un couplage entre les processus d'endommagement et le frottement.

On peut montrer que le potentiel effectif se présente sous la forme :

$$W^*(\Sigma, \alpha, l, \theta) = \frac{1}{2} \Sigma : S^0 : \Sigma + \alpha \Sigma_{nt} - \frac{1}{2} K \alpha^2 + 2 \int_0^l G(\Sigma, \alpha, l, \theta) dl \quad (4)$$

$G$  est le taux de restitution d'énergie de la mésofissure branchée. Il est déduit des facteurs d'intensité de contraintes, obtenus par analyse mécanique de la fissure branchée (Cotterell et Rice, 1980 ; Nemat-Nasser et Horii, 1986, etc.).

### 2.3- Formulation incrémentale 3-D du modèle

La déformation peut alors s'écrire sous la forme :

$$E = S^0 : \Sigma + \alpha(n \otimes t)^s + E^b(\Sigma, \alpha, l, \theta) \quad (5)$$

$E^b(\Sigma, \alpha, l, \theta)$  étant la déformation induite par les branches.

La fonction seuil associée à  $l$  est choisie du type critère de Griffith :  $G = 2\gamma$  (6a)

$\theta$  étant associé à la direction maximisant  $G$ , il est déterminé par  $\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$  (6b)

En écrivant la condition de consistance sur ces relations, on aboutit après résolution à des relations du type :  $\dot{l} = A : \dot{\Sigma}$ ,  $\dot{\theta} = B : \dot{\Sigma}$  et  $\dot{b} = C : \dot{\Sigma}$  (7)

Les tenseurs du second ordre  $A$ ,  $B$  et  $C$  dépendent de l'état actuel de contrainte, de l'incrément de charge appliqué et de l'état de mésosfissuration (Renaud, 1998). La différentiation de (5) permet d'établir la loi de comportement en vitesse :  $\dot{E} = L : \dot{\Sigma}$  (8) dans laquelle le tenseur d'ordre 4  $L$  est la matrice tangente de la loi de comportement du matériau homogénéisé.

### 3- Application au comportement d'un grès

On se propose ici d'illustrer les performances du modèle proposé à travers la simulation de deux essais : compression uniaxiale monotone et compression uniaxiale cyclique. Le matériau considéré est un grès de Fontainebleau. Les valeurs retenues pour les paramètres du modèle sont les suivantes :

- coefficients élastiques :  $E_0 = 39300$  MPa,  $\nu_0 = 0.13$  ; - coefficient de frottement  $\mu = 0.6$  ;
- cohésion  $\tau_c^0 = 5$  MPa ; - ténacité de la matrice :  $K_I^c = 0.6$  MPa $\sqrt{m}$ .
- densité initiale de mésosfissures :  $\omega = 0.06$

Par manque de données mésostructurales sur le grès étudié, l'identification précise de  $\omega$  n'a pas été possible. De fait  $\omega$  doit être perçu ici comme un paramètre de calage<sup>‡</sup>. La comparaison entre la simulation en compression uniaxiale et l'expérience est montrée sur la figure 3. On note un bon accord avec les données. En particulier, l'apparition de déformations volumiques dilatantes dues à la mésosfissuration semble être bien décrite.

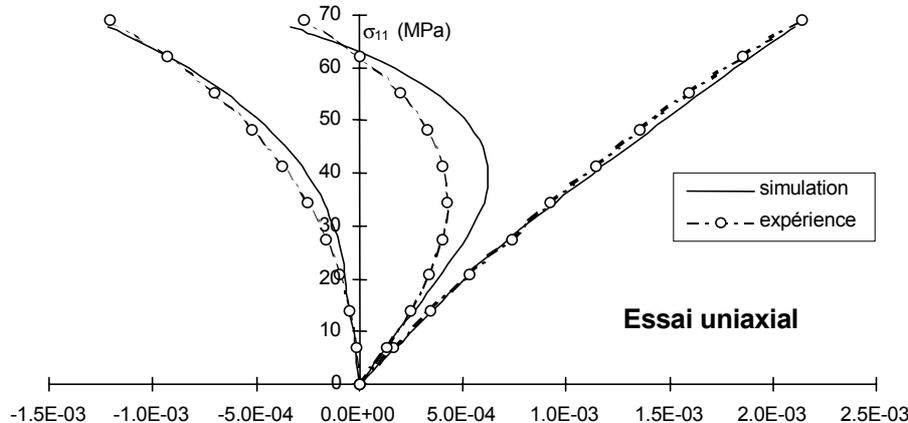


Figure 3 : Courbes contraintes - déformations en compression uniaxiale.

Le comportement sous sollicitation uniaxiale cyclique est indiqué à la figure 4. On note la nature complexe de la réponse globale (en déchargement - recharge) prédite par le modèle : anisotropie induite par l'endommagement, déformations permanentes, boucles d'hystérésis etc... Ce

<sup>‡</sup> La valeur de 0.06 retenue apparaît néanmoins comme très plausible.

comportement hystérétique avec présence de déformations permanentes importantes correspond à l'incompatibilité des déformations de glissement bloquées par frottement. Cette interprétation peut être confirmée en examinant par exemple l'évolution du glissement au cours d'un cycle de chargement - déchargement - rechargement (figure 5, cas du premier cycle pour deux familles de mésosfissures). Lors du déchargement, on observe d'abord une phase de blocage du glissement ( $b/a$  constant) suivie d'une mobilisation en sens opposé (ce qui a pour effet la diminution du glissement cumulé  $b/a$ ). Dans la phase de blocage du glissement, du fait de la propagation préalable des mésosfissures, le matériau présente une dégradation par rapport à l'état initial. A la fin de la décharge, on constate la présence d'un glissement résiduel non négligeable. Lors du rechargement, on note une évolution du glissement après une nouvelle phase de blocage. Les évolutions de la longueur des branches et celles de l'ouverture moyenne de ces branches sont assez similaires à celle du glissement (Renaud, 1998).

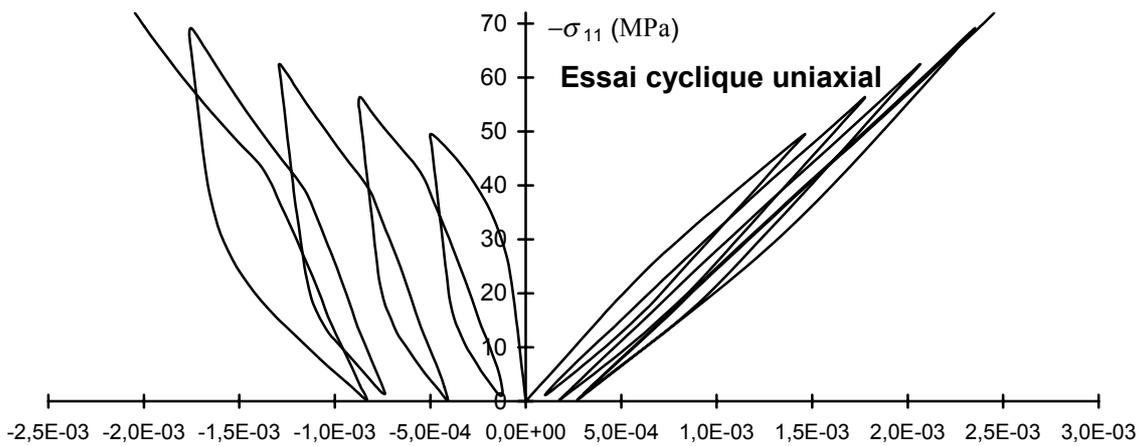


Figure 4 : Prédiction du comportement sous compression cyclique uniaxiale.

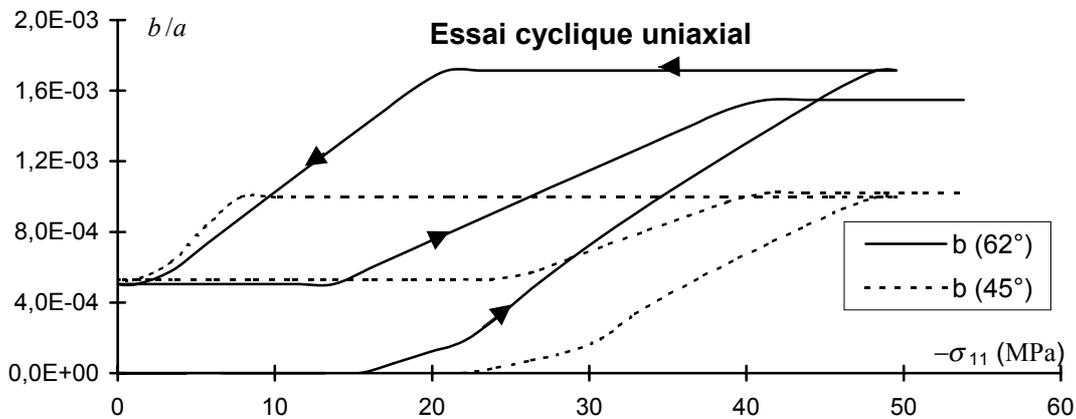


Figure 5: Essai cyclique uniaxial : évolution du glissement.

#### 4- Conclusions :

Le modèle 3-D, construit dans le cadre des méthodes de changement d'échelle, prend en compte les mécanismes prédominants de la déformation des matériaux quasi fragiles. Le changement d'échelle permet d'identifier la part des différents mécanismes dans la déformation macroscopique ainsi que le couplage à l'échelle mésoscopique entre endommagement et frottement. Les potentialités d'une telle démarche pour décrire le comportement complexe de certaines roches apparaissent intéressantes. D'autres applications réalisées ou en cours (autres trajets de chargement, étude d'un granite et d'un marbre, refermeture de mésosfissures) renforcent cette conclusion. Malgré ces résultats, la résolution du problème de croissance en mode mixte des mésosfissures 3-D n'a été qu'approchée. Les recherches à venir devraient tendre à améliorer la modélisation sur ce point.

#### Références bibliographiques :

- S. ANDRIEUX** (1983) : Un modèle de matériau microfissuré – Application aux roches et aux bétons. *Thèse de doctorat*. E.N.P.C..
- S. ANDRIEUX, Y. BAMBERGER & J. J. MARIGO** (1986) : Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches, *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 5 (3), pp. 471-513.
- M. BATISTA, & D. GROSS** (1998) : The sliding crack model of brittle deformation : an internal variable approach, *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, n° 5-6, pp. 487-509.
- Y. BERTHAUD, C. FOND & P. BRUN** (1994) : Effect of interactions on the stiffness of cracked media. *Mech. Res. Commun.*, vol. 21, n° 5, pp. 525-533.
- H. D. BUI, K. DANG VAN & C. STOLZ** (1981) : Relations entre les grandeurs macroscopiques et microscopiques pour un solide élastique - fragile ayant des zones endommagées. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t.292, Série II, pp. 863-866.
- J. L. CHABOCHE** (1993) : Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage, *Int. J. Damage Mech.*, vol. 2, pp. 311-329.
- B. COTTEREL & J. R. RICE** (1980) : Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. Fract.*, vol. 16, pp. 155-169.
- D. FANELLA & D. KRAJCI NOVIC** (1988) : A micromechanical model for concrete in compression. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 29, pp. 59-66.
- G. FRANCFORT, J. J. MARIGO** (1996) : La théorie de Griffith de la rupture fragile revisitée. *Comptes rendus de la réunion annuelle du Groupe de travail Mecamat 'Physique et Mécanique de l'Endommagement*, pp.78 - 111, Marne la Vallée.
- L. GAMBAROTTA, S. LAGOMARSINO** (1993) : A microcracked damage model for brittle materials. *Int. J. Solids Structures*, vol. 30, n° 2, pp. 177-198.
- D. HALM, A. DRAGON** (1996) : A model of anisotropic damage by mesocrack growth ; unilateral effect, *Int. J. of Damage Mechanics*, Vol. 5, pp. 384-402.
- D. HALM D. et A. DRAGON** (1998) , An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials, *Eur. J. Mech. , A/Solids*, vol. 17, n° 3, p. 439-460, 1998.
- M. HORI & S. NEMAT-NASSER** (1983) : Overall moduli of solids with microcracks load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 31, n° 2, pp. 155-171.
- M. KACHANOV** (1993) : Elastic solids with many cracks and related problems. In : *J.W. Hutchinson & T. Y. Wu (eds), Advances in Applied Mechanics*, pp. 259-445, Academic Press.
- D. KRAJCI NOVIC** (1997) : *Damage Mechanics*, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, vol. 41.
- R. L. KRANZ** (1983) : Microcracks in rocks : a review, *Tectonophysics*, vol. 100, pp. 449-480.
- B.R. LAWN et D.B. MARSHALL** (1998) : Nonlinear stress-strain curves for solids containing closed cracks with friction », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n° 1, p. 85-113, 1998.
- X. LEE & J. W. JU** (1991) : Micromechanical damage models for brittle solids, part II : compressive loadings. *J. Eng. Mech.* vol. 117, pp. 1515-1536.
- D. LEGUILLON & E. SANCHEZ-PALENCIA** (1982) : On the behaviour of a cracked elastic body with (or without) friction. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, vol. 1, n° 2, pp. 195-209.
- T. MURA** (1987) : *Micromechanics of defects in solids*. 2nd ed., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- S. NEMAT-NASSER & H. HORII** (1982) : Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst. *J. Geophys. Res.*, vol. 87, n° B8, pp. 6805-6821.
- S. NEMAT-NASSER & M. OBATA** (1988) : A microcrack model of dilatancy in brittle materials. *J. Appl. Mech.*, vol. 55, pp. 24-350.
- S. NEMAT-NASSER & M. HORI** (1993) : *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North - Holland, Amsterdam.
- V. RENAUD, D. KONDO & J. P. HENRY** (1996) : Computations of effective moduli for microcracked materials : a boundary element approach, *Computational Materials Science*, vol. 5, n° 1-3, pp. 227-237.
- V. RENAUD** (1998) : Contributions à l'étude d'un modèle de mésosfissuration : application au comportement d'un grès. *Thèse de doctorat*, Université Lille I.
- H. WELEMANE ET F. CORMERY** (1999) : Un modèle d'endommagement par mésosfissuration, *14è Congrès Français de Mécanique*, Toulouse.
- A. ZAOU** (1998) : Matériaux hétérogènes et composites - Cours de Majeure de Mécanique, Option Matériaux et Structures. Ecole Polytechnique, Palaiseau.